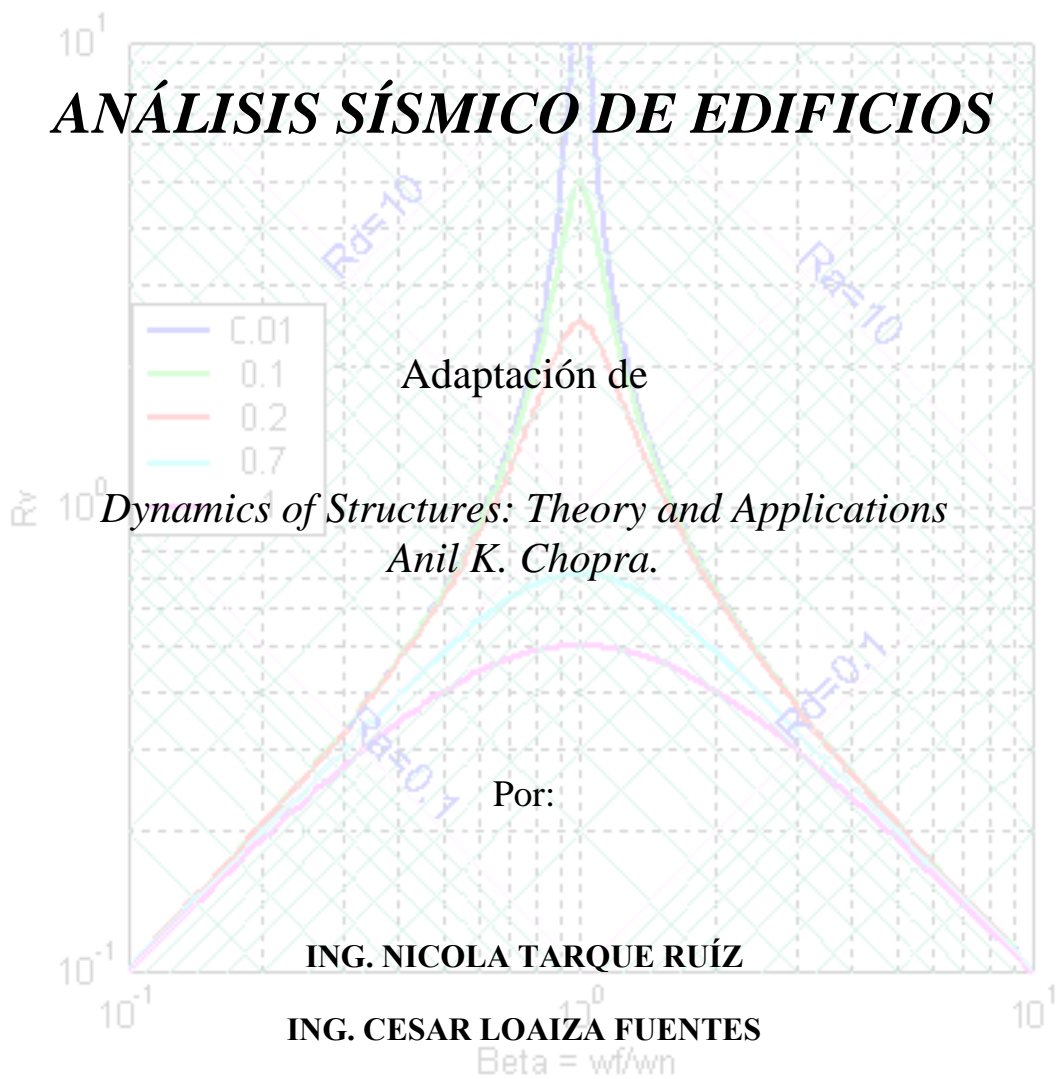


XVI CURSO INTERNACIONAL DE ESTRUCTURAS

QUITO – ECUADOR

OCTUBRE DE 2003



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA

Un agradecimiento especial al Dr. Marcial Blondet por su valioso aporte en la elaboración de este documento y en el desarrollo del programa en Matlab.

XVI CURSO INTERNACIONAL DE ESTRUCTURAS**ANÁLISIS SÍSMICO DE EDIFICIOS****CAPITULO 1 INTRODUCCIÓN****PRIMERA PARTE
SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD****CAPITULO 2 VIBRACIONES LIBRES**

2.1	El oscilador viscoelástico de un grado de libertad.....	3
2.2	Ecuación del movimiento.....	4
2.3	Vibraciones libres.....	6

CAPITULO 3 RESPUESTA SÍSMICA

3.1	Vibraciones ante carga armónica.....	12
3.2	Excitación sísmica.....	15
3.3	Espectros de respuesta.....	16

**SEGUNDA PARTE
SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD****CAPITULO 4 VIBRACIONES LIBRES**

4.1	El oscilador viscoelástico de varios grados de libertad.....	21
4.2	Ecuación del movimiento.....	22
4.3	Vibraciones libres.....	28

CAPITULO 5 MODOS Y FRECUENCIAS NATURALES

5.1	Cálculo de los modos y frecuencias naturales de vibración.....	32
5.2	Matrices modales y espectrales.....	33
5.3	Ortogonalidad de los modos.....	33

CAPITULO 6 RESPUESTA SÍSMICA

6.1	Análisis modal de la respuesta sísmica.....	35
6.2	Análisis espectral.....	39
6.3	Métodos de combinación espectral de la respuesta modal.....	42

ANEXOS.....	44
-------------	----

REFERENCIAS.....	51
------------------	----

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El presente documento sobre Análisis Sísmico de Edificios, presentado en el XVI Curso Internacional de Estructuras, tiene la finalidad de proporcionar los principales conceptos sobre la dinámica de sistemas estructurales de uno y varios grados de libertad. El texto es una adaptación del libro “Dynamics of Structures: Theory and Applications” del reconocido autor Anil K.Chopra (1980, 1995), y de las notas de clase del curso de postgrado de Dinámica de Estructuras, que se dicta en la Maestría en Ingeniería Civil de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

El análisis de sistemas de un grado de libertad se inicia con el estudio del oscilador viscoelástico para determinar su ecuación del movimiento. Luego, se estudian las vibraciones libres de sistemas no amortiguados y amortiguados, además de las vibraciones forzadas generadas por cargas armónicas y por excitación sísmica. En el estudio de sistemas de varios grados de libertad se analizan las vibraciones libres de sistemas estructurales no amortiguados y amortiguados. Luego, se estudia el cálculo de los modos y frecuencias naturales de vibración, y las matrices modales y espectrales. El estudio concluye con el análisis de la respuesta sísmica y los métodos de combinación espectral de la respuesta modal.

PRIMERA PARTE SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

CAPÍTULO 2

VIBRACIONES LIBRES

2.1 El oscilador viscoelástico de un grado de libertad

El oscilador viscoelástico de un grado de libertad se usa para representar sistemas estructurales sencillos desde el punto de vista dinámico.

Un ejemplo de este sistema es la pérgola de la figura 2.1, construida con columnas muy livianas que soportan una losa superior. En este ejemplo, se requiere conocer el movimiento de la losa cuando su base está sometida a un movimiento sísmico. Para ello, se determina la variación del desplazamiento lateral u durante el movimiento sísmico y después de un cierto tiempo de finalizado el movimiento.

Para evaluar la variación del desplazamiento en el tiempo se necesitan plantear una serie de hipótesis simplificadoras. La estructura se representa como un modelo ideal, cuyas propiedades pueden estudiarse y manipularse matemáticamente.

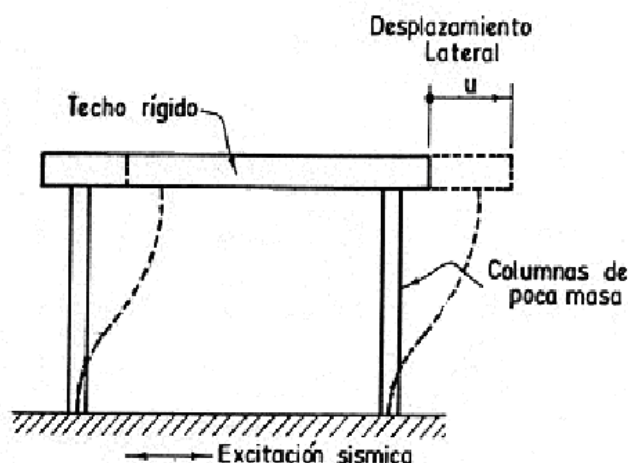


Fig. 2.1. Ejemplo de una estructura de un piso

En primer lugar se asume que la base de la estructura es fija y que la losa es indeformable. Se considera que la losa sólo puede desplazarse horizontalmente, por lo tanto, basta con conocer el desplazamiento de uno de sus puntos para determinar la configuración deformada de la estructura. En este caso, se dice que el sistema tiene un grado de libertad.

Se examinan las distintas fuerzas que actúan sobre la losa de la estructura, y se considera que su movimiento es originado por una fuerza externa $P(t)$ variable en el tiempo. La principal diferencia entre el análisis estático y el dinámico, es la intervención en el segundo caso de la fuerza de inercia. Esta fuerza actúa en sentido opuesto a la aceleración de la masa del sistema. Se asume que toda la masa de la estructura se encuentra concentrada en la losa.

Se considera que la estructura presenta un comportamiento elástico, es decir, si se le impone un desplazamiento lateral, se generan fuerzas de restitución o restitutivas proporcionales al desplazamiento, pero de sentido contrario. La constante de proporcionalidad entre la fuerza de restitución elástica y el desplazamiento lateral, se denomina rigidez lateral de la estructura k . En el ejemplo de la pérgola, la rigidez de la estructura es proporcionada íntegramente por las columnas.

Para completar el proceso de idealización de la estructura, se considera los mecanismos de disipación de energía. Si la estructura se encuentra en movimiento bajo la acción de algún agente externo que deje de actuar, el sistema continuará en movimiento durante algún tiempo con oscilaciones de amplitud decreciente, hasta llegar al reposo. En este caso, se dice que el movimiento es amortiguado.

Uno de los casos de vibraciones amortiguadas más sencillos de estudiar es el del amortiguamiento viscoso, caracterizado por fuerzas amortiguadoras proporcionales, pero de sentido opuesto a la velocidad del sistema.

La figura 2.2 muestra la idealización de la pérgola, y los parámetros más importantes desde el punto de vista dinámico: masa, rigidez, amortiguamiento y la fuerza externa $P(t)$.

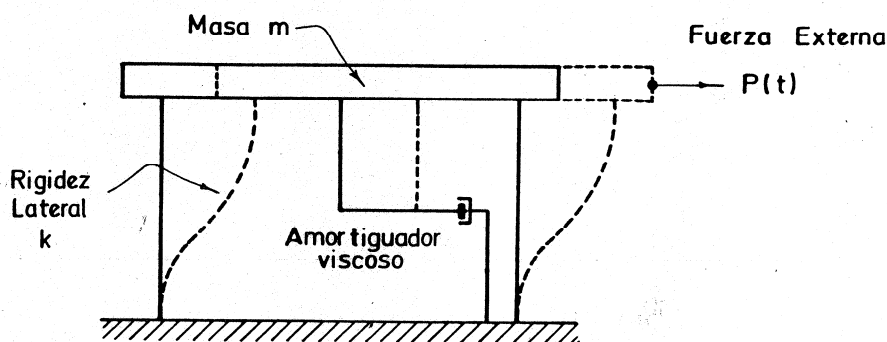


Fig. 2.2. Estructura idealizada, oscilador viscoelástico de 1 g.d.l.

2.2 Ecuación de movimiento

La figura 2.3 muestra el diagrama de cuerpo libre de la losa de la pérgola, cuando presenta un desplazamiento u , una velocidad \dot{u} , y una aceleración \ddot{u} . Se considera para este diagrama el sentido horizontal derecho como positivo.

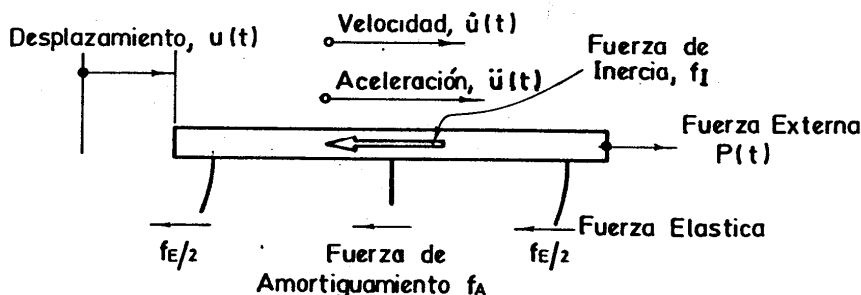


Fig. 2.3. Diagrama de cuerpo libre de la losa

Las fuerzas que actúan sobre la losa son:

Fuerza externa	$\mathbf{P}(t)$
Fuerza de inercia	$\mathbf{f}_i = -\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}}(t)$
Fuerza de amortiguamiento viscoso	$\mathbf{f}_A = -\mathbf{c} \dot{\mathbf{u}}(t)$
Fuerza de restitución elástica	$\mathbf{f}_E = -\mathbf{k} \mathbf{u}(t)$

Donde \mathbf{c} representa el coeficiente de amortiguamiento viscoso.

Según el principio de D'Alembert (que no es sino una reformulación de la Segunda Ley de Newton), la losa se encuentra en equilibrio dinámico, bajo la acción de las fuerzas que aparecen en el diagrama de cuerpo libre:

$$\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_E + \mathbf{P}(t) = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

o de igual manera:

$$-\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{k} \mathbf{u} + \mathbf{P}(t) = \mathbf{0}$$

Si se agrupan los términos, se obtiene:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{P}(t) \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) es una ecuación diferencial de segundo orden y representa el movimiento de la estructura.

Para el estudio de la respuesta de la estructura sometida a un movimiento en su base, se considera que la fuerza externa es nula. Sin embargo, se puede hallar una fuerza externa equivalente a la excitación sísmica. La figura 2.4 muestra dos sistemas equivalentes. En el primero la estructura presenta un desplazamiento en su base \mathbf{u}_s , y en el segundo la losa se ha desplazado una cantidad \mathbf{u} con respecto a su posición inicial, debido a una fuerza externa.

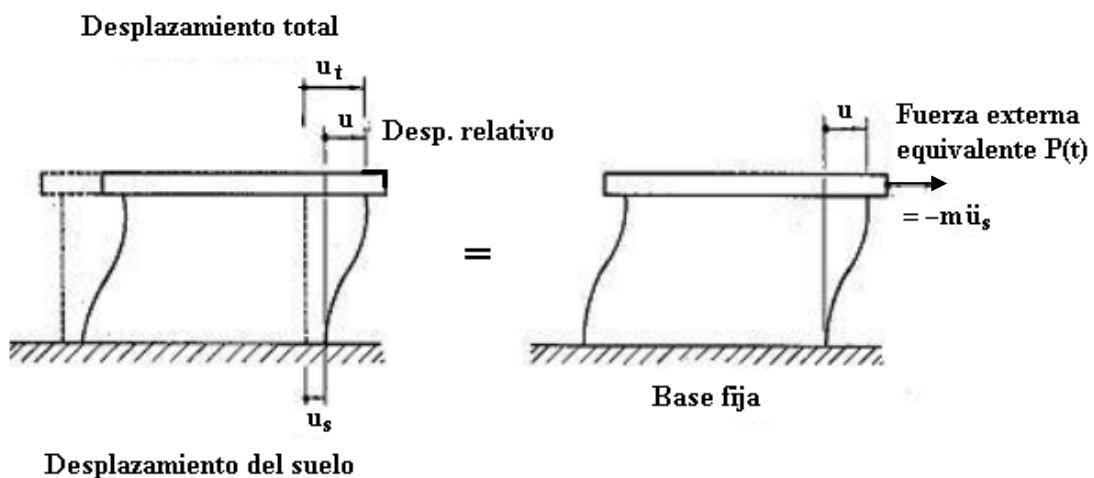


Fig. 2.4. Fuerza externa equivalente a la excitación sísmica

El desplazamiento relativo \mathbf{u} de la losa con respecto al suelo, se expresa como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_s$$

Si se deriva la expresión anterior se tiene:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{u}}_t - \ddot{\mathbf{u}}_s$$

En el caso del desplazamiento de la base, las fuerzas que actúan sobre la losa son:

$$\mathbf{f}_E = -\mathbf{k} \mathbf{u} \quad (\text{fuerza elástica})$$

$$\mathbf{f}_A = -\mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} \quad (\text{fuerza de amortiguamiento viscoso})$$

$$\mathbf{f}_I = -\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (\text{fuerza de inercia})$$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{fuerza externa})$$

Finalmente, se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio dinámico:

$$-\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}}_t - \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

ó

$$-\mathbf{m} (\ddot{\mathbf{u}}_s + \ddot{\mathbf{u}}) - \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

de donde:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = -\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}}_s \quad (2.4)$$

Si se comparan las ecuaciones (2.2) y (2.4), se observa que el efecto del movimiento de la base de la estructura, es idéntico al efecto de aplicar sobre la masa de la estructura una fuerza externa equivalente. Por lo tanto, se concluye que:

$$\mathbf{P}(t) = -\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}}_s(t) \quad (2.5)$$

2.3 Vibraciones libres

En la solución de la ecuación del movimiento para sistemas en vibración libre, no se considera fuerza externa alguna. Para comprender mejor la respuesta de los sistemas en vibración libre, se identifican algunas características fundamentales de su comportamiento dinámico. Primero se estudia los sistemas en vibración libre no amortiguados, y luego los sistemas amortiguados.

Sistemas no amortiguados

Los casos de vibraciones sin fuerzas de amortiguamiento son físicamente imposibles, pero posibles desde el punto de vista conceptual. En estos casos la ecuación del movimiento se representa como:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

ó

$$\ddot{\mathbf{u}} + \omega_n^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

Donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.8)$$

Entonces, la solución general de la ecuación diferencial (2.7) es:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{A} \cos(\omega_n t) + \mathbf{B} \sin(\omega_n t) \quad (2.9)$$

Donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son constantes que dependen de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad del sistema. Si se deriva ambos miembros de la ecuación (2.9), se obtiene una expresión que permite calcular la velocidad de la vibración:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{A} \omega_n \sin(\omega_n t) + \mathbf{B} \omega_n \cos(\omega_n t) \quad (2.10)$$

Por ejemplo, para un tiempo $t = 0$, el desplazamiento y la velocidad serán $\mathbf{u}(0)$ y $\dot{\mathbf{u}}(0)$, respectivamente. Entonces, se tiene:

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{A}$$

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{B} \omega_n$$

Por lo tanto, la ecuación (2.9) se puede expresar como:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(0) \cos(\omega_n t) + [\dot{\mathbf{u}}(0) / \omega_n] \sin(\omega_n t) \quad (2.11)$$

El término ω_n representa la frecuencia circular natural de vibración y se expresa en radianes/segundos. La ecuación (2.11) describe la respuesta del sistema como un movimiento armónico simple, que también se expresa como:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{\max} \cos(\omega t - \phi) \quad (2.12)$$

donde:

$$\mathbf{u}_{\max} = \sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2} = \sqrt{[\mathbf{u}(0)]^2 + \left[\frac{\dot{\mathbf{u}}(0)}{\omega_n}\right]^2} \quad (2.13)$$

y

$$\phi = \arctan\left(\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}\right) = \arctan\left(\frac{\dot{\mathbf{u}}(0)}{\omega_n \mathbf{u}(0)}\right) \quad (2.14)$$

El término \mathbf{u}_{\max} representa la amplitud de las oscilaciones y ϕ representa el ángulo de fase. El cociente ϕ / ω representa el tiempo del sistema en adquirir el máximo desplazamiento (\mathbf{u}_{\max}). La figura 2.5 muestra la variación del desplazamiento de la losa en el tiempo.

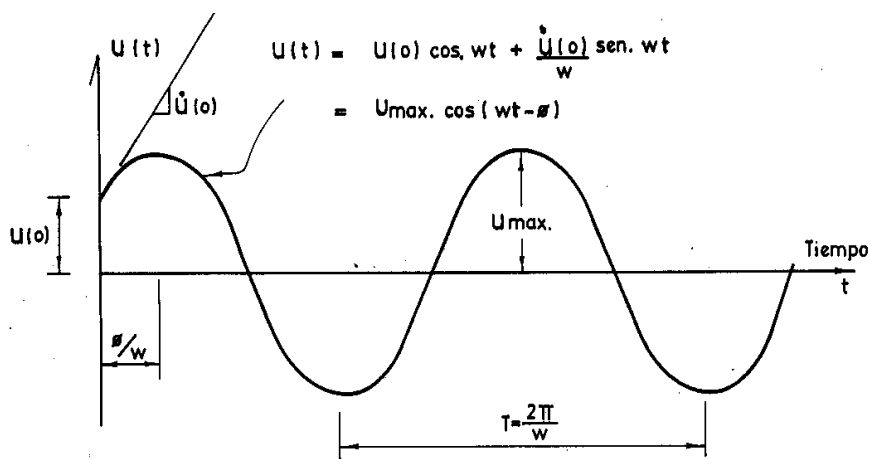


Fig. 2.5. Vibraciones libres no amortiguadas

El periodo natural de la estructura T representa el tiempo necesario para completar una oscilación completa, y se calcula con:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.15)$$

El número de oscilaciones que la estructura efectúa por unidad de tiempo, se denomina frecuencia natural, y se determina con:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (2.16)$$

El adjetivo natural es usado para describir el periodo T , la frecuencia f y la frecuencia circular ω_n , ya que sólo dependen de los principales parámetros de la estructura, es decir, de su rigidez y de su masa, más no de sus condiciones iniciales.

Sistemas amortiguados

En la realidad no existen sistemas no amortiguados. Todos los sistemas presentan un cierto grado de amortiguamiento, de lo contrario oscilarían eternamente sin variar su amplitud. El amortiguamiento en las estructuras atenúa las oscilaciones gradualmente hasta detenerlas.

Si se asume que la estructura del ejemplo de la pérgola posee amortiguamiento viscoso, se tiene la siguiente ecuación diferencial que describe su movimiento:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (2.17)$$

La constante de amortiguamiento c representa la energía que se disipa en un ciclo de

vibración libre o en un ciclo de vibración bajo excitación armónica.

La ecuación (2.17) presenta tres posibles soluciones que dependen de los factores denominados amortiguamiento crítico c_{cr} y razón de amortiguamiento ξ . Estos factores se definen como:

$$c_{cr} = 2m\omega_n \quad (2.18)$$

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} \quad (2.19)$$

Si $c=c_{cr}$ ó $\xi=1$, el sistema presenta un amortiguamiento crítico. Este caso no constituye una vibración, dado que el sistema retorna a su posición de equilibrio sin oscilar. Si $c>c_{cr}$ ó $\xi>1$, el sistema presenta un amortiguamiento supercrítico, que tampoco constituye una vibración, ya que el sistema retorna lentamente a su posición de equilibrio sin oscilar. Si $c<c_{cr}$, es decir, $\xi<1$, el sistema presenta un amortiguamiento subcrítico. En este caso el sistema oscila sobre su posición de equilibrio con un decremento progresivo de su amplitud.

De estas tres posibles soluciones sólo el caso subcrítico, constituye una vibración libre, y por lo tanto, éste es el caso de interés.

La solución de la ecuación diferencial de un sistema en vibración libre con amortiguamiento subcrítico es:

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A \cos \omega_D t + B \sen \omega_D t) \quad (2.20)$$

El término ω_D representa la frecuencia circular de las oscilaciones amortiguadas, y se determina con:

$$\omega_D = \sqrt{1-\xi^2} \omega_n \quad (2.21)$$

Las constantes A y B de la ecuación (2.20) dependen de las condiciones iniciales y se calculan con:

$$A = u(0)$$

$$B = \frac{\dot{u}(0) + u(0)\xi\omega_n}{\omega_D}$$

La ecuación del movimiento también se puede expresar como:

$$u(t) = u_{\max} e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_D t - \phi) \quad (2.22)$$

donde:

$$u_{\max} = \sqrt{\left[\frac{\dot{u}(0) + u(0)\xi\omega}{\omega_D} \right]^2 + [u(0)]^2}$$

y

$$\phi = \text{atan} \left[\frac{\dot{u}(0) + u(0)\xi\omega}{\omega_D u(0)} \right] \quad (2.23)$$

La figura 2.6 muestra gráficamente la ecuación (2.22), y su relación con la respuesta del sistema no amortiguado bajo iguales condiciones iniciales.

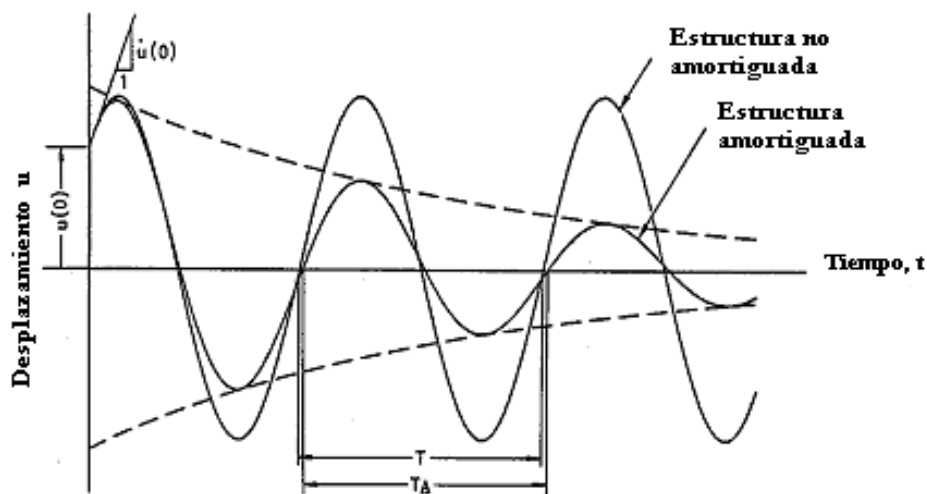


Fig. 2.6. Efecto del amortiguamiento en las vibraciones libres

En el caso amortiguado, el sistema oscila con un periodo ligeramente mayor que el del caso no amortiguado. La amplitud de las oscilaciones amortiguadas decrece en forma exponencial.

El periodo de la vibración amortiguada se relaciona con el de la vibración no amortiguada mediante la expresión:

$$T_D = \frac{T}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.24)$$

Para la mayoría de las estructuras el factor del amortiguamiento ξ es menor a 0.2, por lo que el período amortiguado T_A es prácticamente igual al período natural no amortiguado T .

En conclusión, el amortiguamiento en estructuras en vibración libre produce oscilaciones de amplitud exponencialmente decrecientes, y de períodos ligeramente mayores al de los casos no amortiguados.

CAPÍTULO 3

RESPUESTA SÍSMICA

3.1 Vibraciones ante carga armónica

Se estudia ahora el caso en que la estructura se encuentra sometida a una fuerza externa variable armónicamente en el tiempo. La ecuación (3.1) muestra ésta expresión:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 \text{sen}(\omega t) \quad (3.1)$$

El término \mathbf{P}_0 representa la magnitud máxima de la fuerza externa, que varía según la función $\text{sen}(\omega t)$, donde ω es la frecuencia circular de excitación.

Por lo tanto, la ecuación diferencial del movimiento es:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = \mathbf{P}_0 \text{sen}(\omega t) \quad (3.2)$$

La solución de esta ecuación diferencial no homogénea está dada por:

$$\begin{aligned} u(t) = e^{-\xi \omega_n t} [A \cos(\omega_D t) + B \text{sen}(\omega_D t)] + (\mathbf{P}_0 / k) [(1 - \beta^2)^2 + \\ + (2 \xi \beta)^2]^{-1} [(1 - \beta^2) \text{sen}(\omega t) - 2 \xi \beta \cos(\omega t)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

El parámetro β representa la razón entre la frecuencia circular de excitación ω y la frecuencia natural ω_n :

$$\beta = \omega / \omega_n \quad (3.4)$$

En la ecuación (3.3) la expresión $[A \cos(\omega_D t) + B \text{sen}(\omega_D t)]$ del primer sumando, representa una vibración libre amortiguada conocida como respuesta transiente, debido a que su amplitud se disipa en el tiempo. Luego de que la respuesta transiente se disipa, la estructura vibra en un estado denominado respuesta de régimen permanente, durante el tiempo que dure la carga armónica.

Las máximas deformaciones se pueden producir antes de que la estructura alcance el régimen permanente. Si se simplifica la respuesta transiente, la ecuación (3.3) queda como:

$$u(t) = (\mathbf{P}_0/k) [(1 - \beta^2)^2 + (2 \xi \beta)^2]^{-1} [(1 - \beta^2) \text{sen}(\omega t) - 2 \xi \beta \cos(\omega t)] \quad (3.5)$$

Operando algebraicamente la ecuación (3.5), se obtiene la respuesta de la estructura para un movimiento armónico simple de frecuencia ω , desfasado con respecto a la fuerza externa $\mathbf{P}(t)$:

$$u(t) = u_{\max} \text{sen}(\omega t - \phi) \quad (3.6)$$

donde:

$$u_{\max} = (\mathbf{P}_0/k) [(1 - \beta^2)^2 + (2 \xi \beta)^2]^{-1/2} \quad (3.7)$$

El término u_{max} representa el máximo desplazamiento de la estructura, y ϕ el ángulo de fase que se calcula con:

$$\phi = \text{atan} [2 \xi \beta / (1 - \beta^2)] \quad (3.8)$$

El cociente (ϕ / ω) es el tiempo de retraso de la respuesta con respecto a la excitación. La figura 3.1 muestra la variación en el tiempo de la fuerza externa $P(t)$ y el desplazamiento de la estructura $u(t)$.

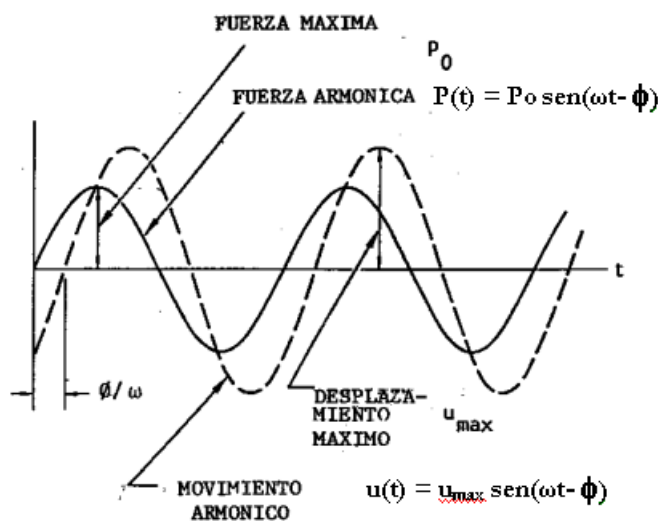


Fig. 3.1. Desplazamiento inducido por fuerza armónica

Si se analiza la ecuación (3.7) se observa que el término P_0/k representa el desplazamiento que se produce en la estructura, si la fuerza externa se aplica en forma estática, es decir, si $P(t) = P(0)$. Los términos restantes de la ecuación (3.7) indican el efecto de haber aplicado la carga en la forma dinámica, por lo tanto, se puede escribir:

$$u_{max} = u_{est} R_d \quad (3.9)$$

Donde el desplazamiento estático u_{est} es:

$$u_{est} = P_0/k \quad (3.10)$$

El término R_d se denomina factor de magnificación dinámica, que depende sólo de la relación de frecuencias $\beta = \omega/\omega_n$ y del factor de amortiguamiento (ecuación 3.11). Físicamente este factor representa cuanto se amplifica la respuesta estática por el efecto de aplicar una carga dinámica.

$$R_d = [(1 - \beta^2)^2 + (2 \xi \beta)^2]^{-1/2} \quad (3.11)$$

En la figura 3.2 se aprecia la variación del factor de magnificación dinámica R_d con respecto a la relación de frecuencias β , para determinados valores de amortiguamiento (recordar que para la mayoría de las estructuras de concreto armado $\xi < 0.2$).

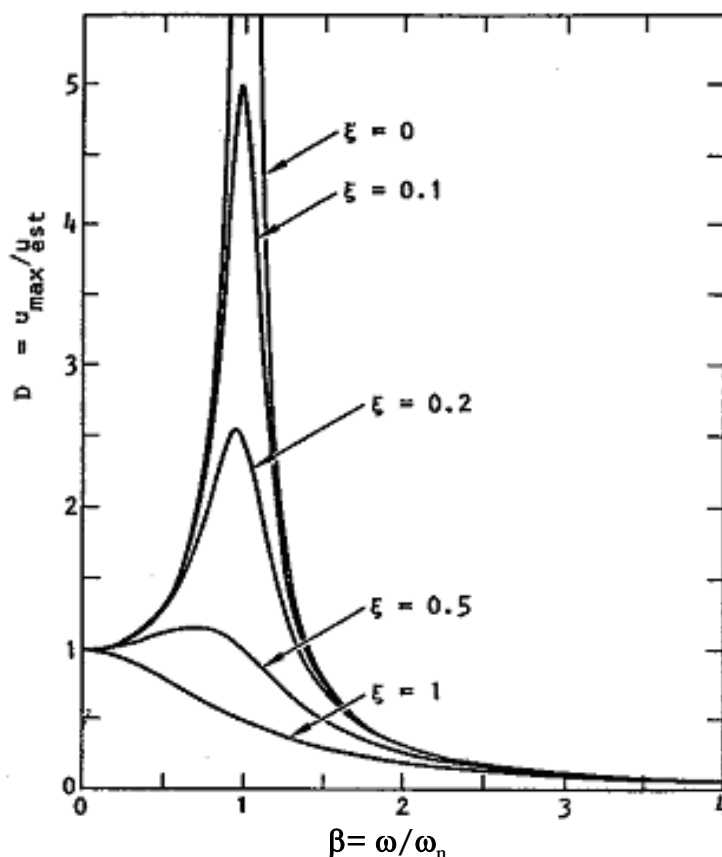


Fig. 3.2. Factor de magnificación dinámica de estructura sometida a fuerza armónica

Se observa de la figura 3.2, que si la frecuencia natural del sistema ω_n es mucho mayor que la frecuencia de excitación ω , es decir $\beta \ll 1$, la deformación de la estructura es prácticamente igual a la deflexión estática, independientemente del amortiguamiento. Se considera en este caso que el efecto dinámico es despreciable.

Si por el contrario, la frecuencia natural del sistema ω_n es mucho menor que la frecuencia de excitación ω , es decir $\beta \gg 1$, la fuerza externa varía rápidamente en comparación con la respuesta de la estructura. Por lo tanto, el factor de amplificación dinámica R_d tiende a cero, es decir, la masa del sistema controla la respuesta de la estructura.

Para valores de la frecuencia de excitación cercanos a la frecuencia natural del sistema (por ejemplo, para valores de β comprendidos entre 0.25 y 2.5), la respuesta de la estructura depende del factor de amortiguamiento, ξ . Para valores de β muy cercanos a la unidad, o cuando las frecuencias de excitación y natural son prácticamente iguales, el factor de magnificación crece rápidamente, es decir, la deformación de la estructura es muy grande en comparación con la deflexión estática. Este fenómeno se acentúa más para valores pequeños de amortiguamiento. En el caso ideal en que $\beta=1$ y $\xi=0$, la deformación de la estructura es máxima, y se dice que la estructura “entra en resonancia”.

La frecuencia de resonancia se puede calcular con la expresión:

$$\omega_{\text{res}} = \omega_n \sqrt{(1-2\xi)} \quad (3.12)$$

De la ecuación (3.12) se concluye que para valores pequeños de amortiguamiento ξ , la frecuencia de resonancia es prácticamente igual a la frecuencia natural del sistema. Por lo tanto, el factor de amplificación dinámica R_d correspondiente se calcula para $\beta=1$ en la ecuación (3.11), con la expresión aproximada:

$$R_d = 1/(2\xi) \quad (3.13)$$

3.2 Excitación Sísmica

La respuesta del oscilador viscoelástico sometido a un movimiento en su base, se determina resolviendo la ecuación diferencial:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = -m \ddot{u}_s(t) \quad (3.14)$$

Donde el término del segundo miembro de la ecuación representa una fuerza externa equivalente a la excitación sísmica $\ddot{u}_s(t)$, que se representa como la aceleración en la base de la estructura en función del tiempo.

La solución de esta ecuación despreciando la componente de la vibración libre, que se disipa rápidamente, es:

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{u}_s(\tau) e^{[-\xi \omega_n(t-\tau)]} \text{sen}[\omega_D(t-\tau)] d\tau \quad (3.15)$$

Donde ω_D es la frecuencia circular natural amortiguada de la estructura.

Dada la complejidad de la ecuación (3.15) y la gran variabilidad que presenta la aceleración del suelo $\ddot{u}_s(t)$, la evaluación en forma analítica del desplazamiento $u(t)$ es prácticamente imposible.

Si bien existen varios métodos numéricos para calcular (generalmente empleando programas de computadora) la respuesta de la estructura en función del tiempo, y la descripción de estos procedimientos está fuera de los alcances de este documento.

3.3 Espectros de Respuesta

Para fines de diseño estructural, es importante conocer los valores máximos de respuesta de las estructuras. Si se grafica el valor absoluto del desplazamiento máximo de varias

estructuras de un grado de libertad con igual grado de amortiguamiento, en función del período natural de cada una de ellas, se obtiene una curva llamada espectro de respuesta de desplazamientos. Esta función se define como:

$$S_d = \max [u (t)] \quad (3.16)$$

La figura 3.3 ilustra el procedimiento seguido para calcular el espectro de respuesta de desplazamientos de estructuras con 2% de amortiguamiento. La señal utilizada corresponde al terremoto de El Centro (componente sur), ocurrido el 18 de mayo de 1940 en el Valle Imperial, California, Estados Unidos.

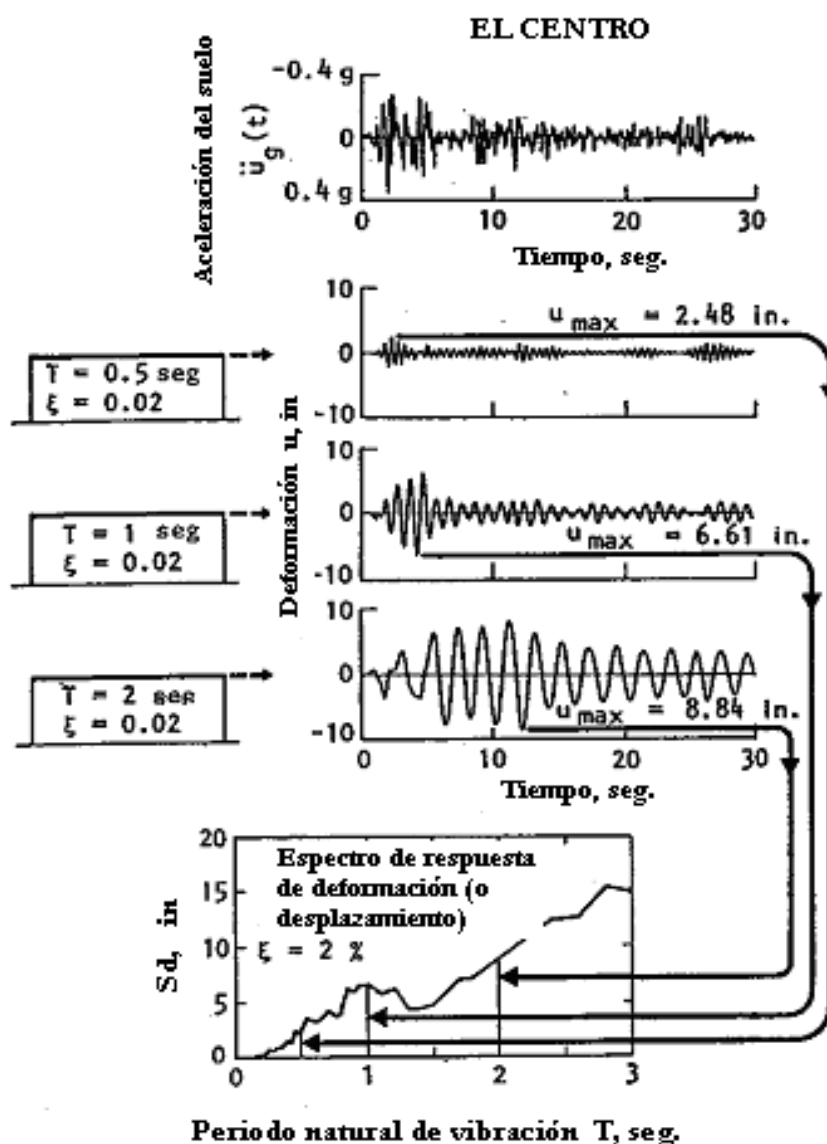


Fig. 3.3. Determinación del espectro de respuesta de desplazamiento

El máximo desplazamiento de cualquier estructura con similar grado de amortiguamiento de 2%, se calcula evaluando el gráfico de la figura 3.3. Si se conoce el valor del período natural del sistema, se debe interceptar al espectro de desplazamientos y leer la ordenada correspondiente de máximo desplazamiento.

Por otro lado, existen otros dos parámetros que se suelen graficar de forma espectral, es decir, en función del periodo o frecuencia de la estructura. Uno de ellos es la pseudovelocity, que se define como:

$$S_v = \omega_n S_d \quad (3.17)$$

Donde ω_n es la frecuencia natural circular de la estructura.

La pseudovelocity también se puede expresar en función del periodo de la estructura T con la expresión:

$$S_v = \frac{2\pi}{T} S_d \quad (3.18)$$

El valor de S_v recibe el nombre de pseudovelocity, ya que tiene unidades de velocidad y representa una medida de la máxima energía de deformación almacenada en la estructura durante el movimiento (ecuación 3.19).

$$E_{\max} = (1/2) k u_{\max}^2 = (1/2) k S_d^2 = (1/2) m \omega_n^2 S_d^2 \quad (3.19)$$

Y por consiguiente:

$$E_{\max} = 1/2 m S_v^2$$

El gráfico de S_v en función del periodo de la estructura, para un valor constante del amortiguamiento, se denomina espectro de respuesta de pseudovelocity.

Otro de los parámetros que se grafican en forma espectral, es la denominada pseudoaceleración S_a definida con las expresiones:

$$S_a = \omega_n^2 S_d \quad (3.20)$$

ó

$$S_a = (2\pi / T)^2 S_d \quad (3.21)$$

El valor S_a recibe el nombre de pseudoaceleración por expresarse en unidades de aceleración. Este parámetro es muy útil, pues permite calcular la fuerza cortante máxima que se produce en la estructura durante un sismo:

$$V_{\max} = k u_{\max} = k S_d = m \omega_n^2 S_d \quad (3.22)$$

Por lo tanto:

$$V_{\max} = m S_a \quad (3.23)$$

ó

$$V_{\max} = (W/g) S_a \quad (3.24)$$

Donde W representa el peso de la estructura.

La pseudoaceleración es, por lo tanto, igual a la máxima fuerza cortante por unidad de masa inducida en la estructura por el movimiento sísmico en su base. El gráfico de S_a en función del período de la estructura, para un determinado grado de amortiguamiento, se denomina espectro de respuesta de pseudoaceleración.

Los espectros de desplazamiento S_d , pseudovelocidad S_v y pseudoaceleración S_a correspondientes al terremoto de El Centro de 1940, componente Sur, para 2% de amortiguamiento se muestran en la figura 3.4. Estos espectros se relacionan en forma simple a través de potencias del período natural de vibración T , y se pueden representar con una sola curva usando papel logarítmico especial a cuatro escalas. La figura 3.5 muestra los espectros de respuesta de S_d , S_v y S_a , del terremoto de El Centro, para valores de 0, 3, 5, 10 y 20% de amortiguamiento crítico.

El uso de espectros de repuesta simplifica notablemente la estimación de la respuesta estructural debida a excitaciones sísmicas. La mayoría de los códigos de diseño sismorresistentes incluyen espectros de diseño, que tratan de representar un promedio de las características de las demandas sísmicas sobre las edificaciones.

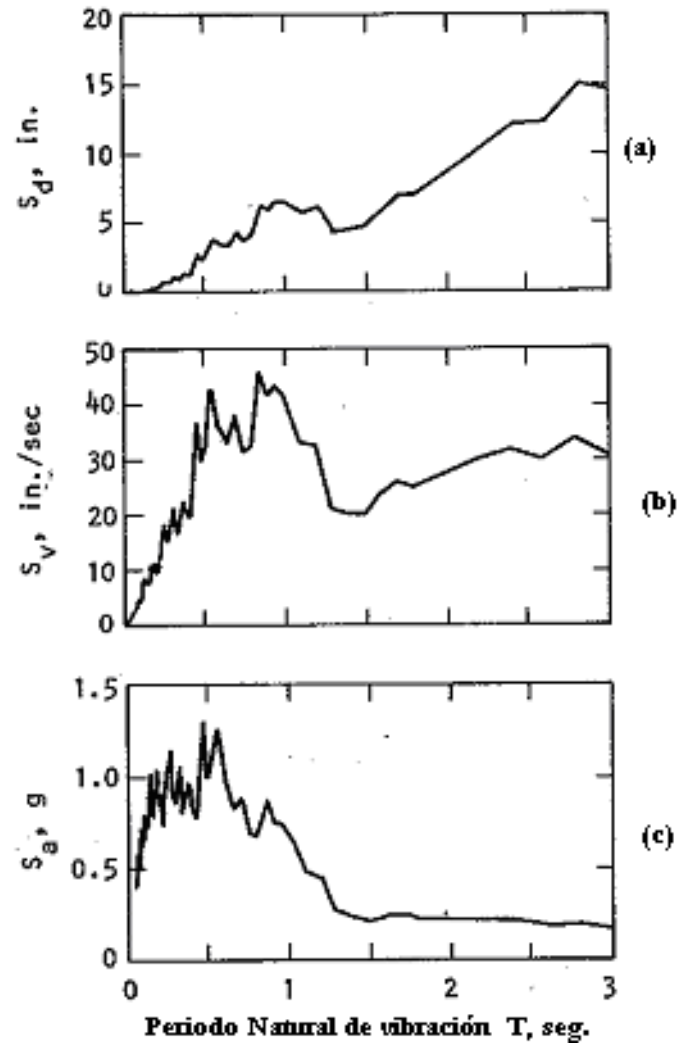


Fig. 3.4. Espectros de respuesta del Terremoto de El Centro de 1940 ($\xi = 2\%$) de
(a) Desplazamiento (b) Pseudovelocidad y (c) Pseudoaceleración

ESPECTRO DE RESPUESTA
 Terremoto El Centro, Componente SOOE
 Valle Imperial - California
 18 de mayo de 1940
 $\xi = 0, 3, 5, 10 \text{ y } 20\%$

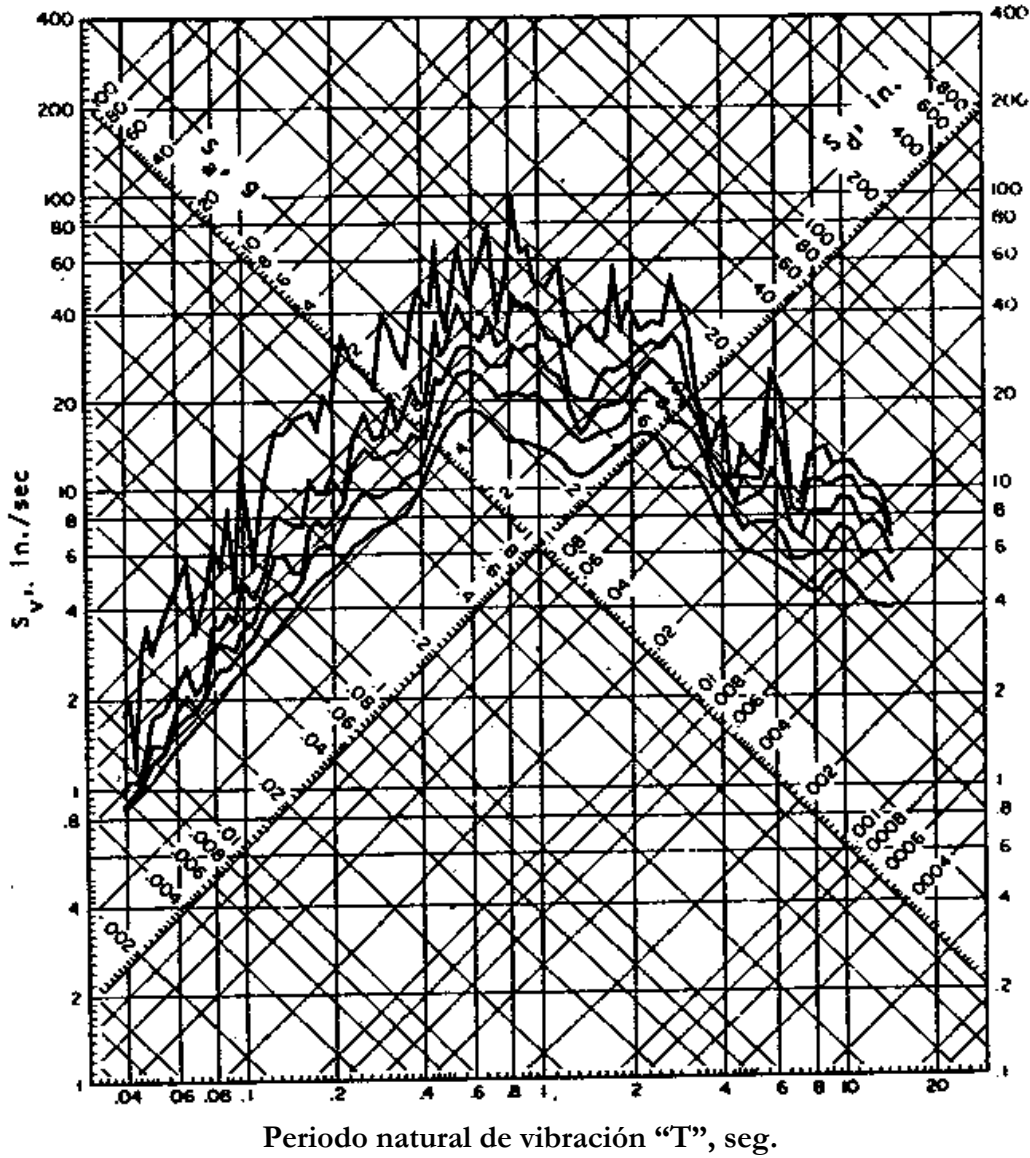


Fig. 3.5. Espectros de respuesta. Terremoto de El Centro 1940.

SEGUNDA PARTE SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

CAPÍTULO 4

VIBRACIONES LIBRES

4.1 El oscilador viscoelástico de varios grados de libertad

Para iniciar el estudio de vibraciones de sistemas de varios grados de libertad se analiza un ejemplo sencillo de un edificio de pórticos de dos pisos. Para la idealización de esta estructura, se asume que los elementos estructurales como vigas y columnas carecen de masa, concentrándose sólo en las losas de entrepiso de cada nivel. El conjunto estructural de losas y vigas se consideran rígidas, en comparación de las columnas que se consideran flexibles para deformaciones laterales, pero rígidas verticalmente. Este modelo idealizado de la estructura de dos pisos, se conoce como edificio de corte y se ilustra en la figura 4.1. El modelo de edificio de corte es el más empleado en el estudio de la dinámica de estructuras de varios pisos.

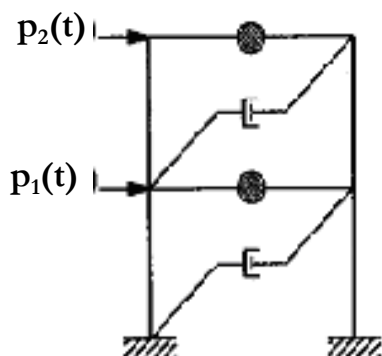


Fig. 4.1. Edificio de Corte

Cualquier modelo matemático de la estructura, debe tener la cantidad suficiente de grados de libertad que asegure una respuesta dinámica muy similar a la respuesta real.

El número de grados de libertad depende del número de desplazamientos elegidos para describir el movimiento de la estructura. En el caso del ejemplo del edificio, los desplazamientos se toman como las coordenadas de los nudos. La figura 4.2 ilustra un ejemplo de este tipo.

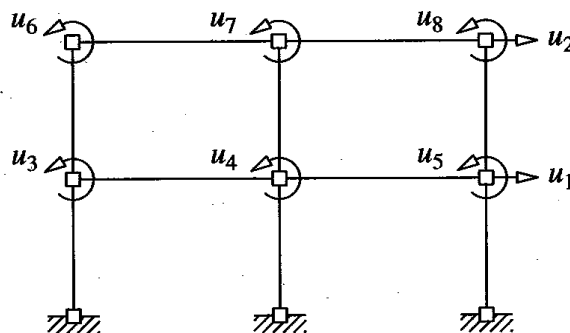


Fig. 4.2. Asignación de grados de libertad

4.2 Ecuación del movimiento

El movimiento de los edificios de corte, al igual que los sistemas de un grado de libertad, se define por medio de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, el edificio de dos pisos que se ilustra en la figura 4.3, presenta en cada nivel una fuerza externa variable en el tiempo, y desplazamientos traslacionales de los niveles 1 y 2, representados por $u_1(t)$ y $u_2(t)$ respectivamente. Estos desplazamientos representan los movimientos de los nudos extremos de cada piso.

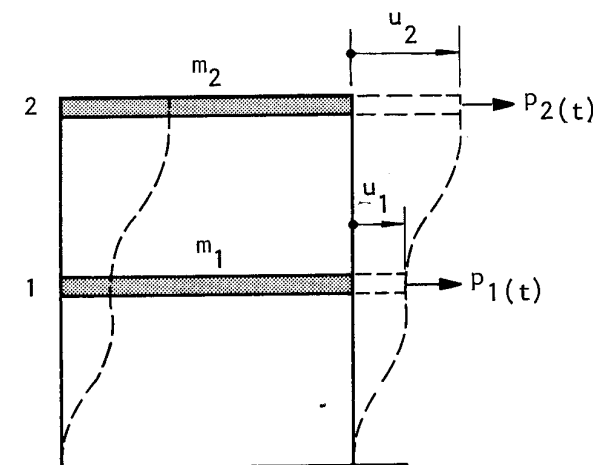


Fig. 4.3. Edificio de corte de 2 pisos sometido a cargas externas

La figura 4.4 muestra el diagrama de cuerpo libre de cada una de las losas de entrepiso del edificio de corte.

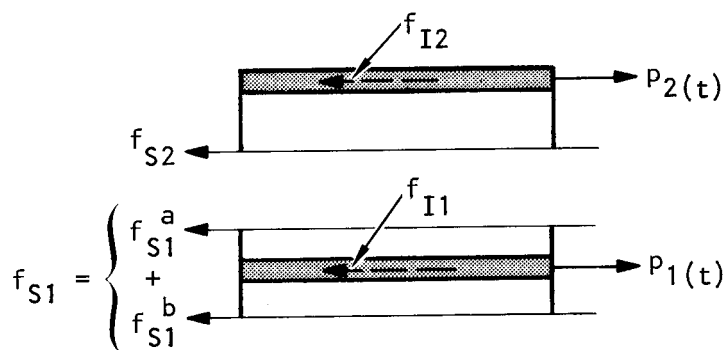


Fig. 4.4. Diagrama de cuerpo libre

Si se realiza el equilibrio dinámico en el diagrama de cuerpo libre de cada una de las losas, se tiene:

$$f_{I1} + f_{S1} = p_1(t) \quad \text{para el primer piso (4.1.a)}$$

$$f_{I2} + f_{S2} = p_2(t) \quad \text{para el segundo piso (4.1.b)}$$

En estructuras linealmente elásticas, las fuerzas restitutivas se relacionan con los desplazamientos de entrepiso por medio de la rigidez equivalente. Por ejemplo, en las

siguientes ecuaciones se relacionan las fuerzas elásticas con los desplazamientos de entrepiso:

$$f_{s1} = f_{s1}^a + f_{s1}^b = k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2) \quad \text{para el primer piso (4.2.a)}$$

$$f_{s2} = k_2 (u_2 - u_1) \quad \text{para el segundo piso (4.2.b)}$$

Las fuerzas de inercia para los niveles 1 y 2, respectivamente, son:

$$f_{i1} = m_1 \ddot{u}_1 \quad (4.3.a)$$

$$f_{i2} = m_2 \ddot{u}_2 \quad (4.3.b)$$

Si se plantea el equilibrio dinámico, se tiene:

$$m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2) = p_1(t) \quad (4.4.a)$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + k_2 (u_2 - u_1) = p_2(t) \quad (4.4.b)$$

Las ecuaciones (4.4.a) y (4.4.b) se pueden escribir en notación matricial, como:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

En este caso, se emplea la siguiente notación para representar a cada matriz descrita:

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \underline{\ddot{\mathbf{u}}} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad \underline{\mathbf{P}}(t) = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Luego, se obtiene la ecuación del movimiento para el edificio de 2 pisos:

$$\underline{\mathbf{m}} \underline{\ddot{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{k}} \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{P}}(t) \quad (4.6)$$

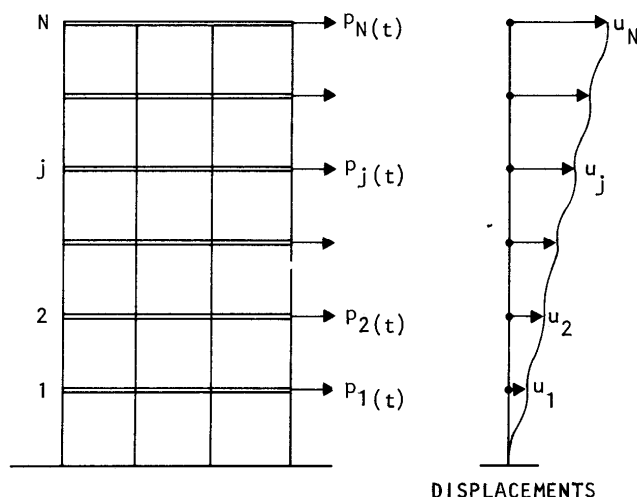


Fig. 4.5. Edificio de N pisos sometido a cargas externas

En general, para el análisis de edificios de N pisos como el que se ilustra en la figura 4.5, se pueden calcular las matrices de la ecuación del movimiento, como:

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} \quad \underline{\mathbf{P}}(t) = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_j(t) \\ \vdots \\ p_N(t) \end{Bmatrix} \quad \underline{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & m_j & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & m_N \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & & & & \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & & & \\ & -k_3 & (k_3 + k_4) & -k_4 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & -k_N \\ & & & & -k_N & -k_N \end{bmatrix}$$

En el caso particular de considerar un sistema estructural amortiguado, se considera una matriz c de amortiguamiento viscoso:

$$\underline{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 & & & & \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 & & & \\ & -c_3 & (c_3 + c_4) & -c_4 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & -c_N \\ & & & & -c_N & -c_N \end{bmatrix}$$

Finalmente, se obtiene la ecuación del movimiento para un edificio de corte de N pisos con amortiguamiento:

$$\underline{m}\ddot{\underline{u}} + \underline{c}\dot{\underline{u}} + \underline{k}\underline{u} = \underline{P}(t) \quad (4.7)$$

Donde \underline{c} representa la matriz de amortiguamiento viscoso y $\dot{\underline{u}}$ el vector velocidad.

Como se observa, existen determinadas características en las matrices que determinan la ecuación del movimiento. Por ejemplo, la matriz de masas es del tipo diagonal, y las matrices de rigidez y amortiguamiento son simétricas. Por otro lado, cuando no existen fuerzas externas aplicadas a la estructura, y se tiene un movimiento sísmico en su base, las ecuaciones que rigen el comportamiento de la estructura son muy semejantes a las estudiadas.

Si se analiza el edificio de dos pisos bajo un movimiento sísmico en su base, como se ilustra en la figura 4.6, el desplazamiento total del primer y segundo piso, respectivamente, son:

$$u_1^t(t) = u_g(t) + u_1(t) \quad (4.8.a)$$

$$u_2^t(t) = u_g(t) + u_2(t) \quad (4.8.b)$$

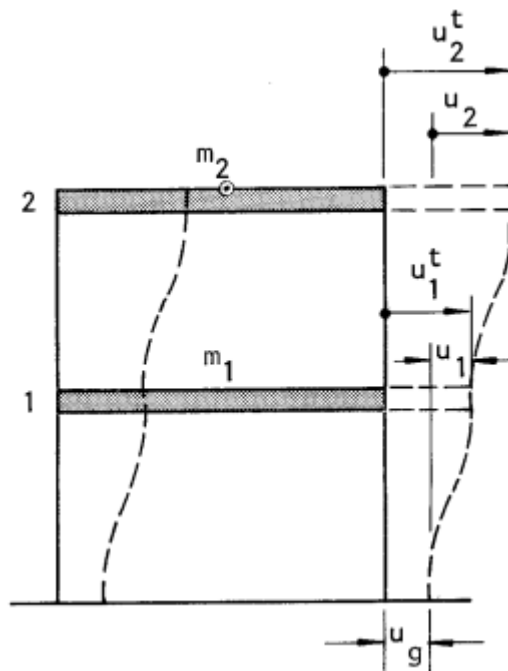


Fig. 4.6. Edificio de dos pisos sometido a excitación sísmica

La figura 4.7 muestra el diagrama de cuerpo libre de cada una de las losas de entrepiso del edificio de corte, sometido a un movimiento en su base.

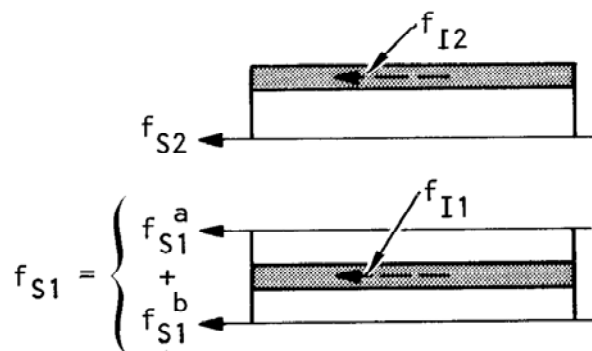


Fig. 4.7. Diagrama de cuerpo libre

De acuerdo al diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 4.7, las ecuaciones de equilibrio dinámico son:

$$f_{I1} + f_{S1} = 0 \quad (4.9.a)$$

$$f_{I2} + f_{S2} = 0 \quad (4.9.b)$$

Donde las masas m_1 y m_2 de acuerdo a las aceleraciones impuestas, presentan las siguientes fuerzas de inercia:

$$f_{I1} = m_1 \ddot{u}_1^t \quad (4.10.a)$$

$$f_{I2} = m_2 \ddot{u}_2^t \quad (4.10.b)$$

Las ecuaciones (4.10.a) y (4.10.b) se pueden expresar como:

$$f_{I1} = m_1 (\ddot{u}_g + \ddot{u}_1) \quad (4.11.a)$$

$$f_{I2} = m_2 (\ddot{u}_g + \ddot{u}_2) \quad (4.11.b)$$

Entonces, las ecuaciones de equilibrio dinámico son:

$$m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2) = -m_1 \ddot{u}_g(t) \quad (4.12.a)$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + k_2 (u_2 - u_1) = -m_2 \ddot{u}_g(t) \quad (4.12.b)$$

Estas expresiones se escriben de forma genérica como:

$$\underline{\underline{m}} \ddot{\underline{u}} + \underline{\underline{k}} \underline{u} = -\underline{\underline{m}} \underline{\underline{1}} \ddot{u}_g(t) \quad (4.13)$$

En esta ecuación, el vector desplazamiento se representa por \underline{u} , el vector aceleración por $\ddot{\underline{u}}$, y las matrices de masa y de rigidez por $\underline{\underline{m}}$ y $\underline{\underline{k}}$, respectivamente. El vector $\underline{\underline{1}}$ representa el desplazamiento resultante de la masa que se obtiene al aplicar estáticamente un desplazamiento unitario en la base del edificio. Finalmente, si se considera que la estructura presenta amortiguamiento viscoso, se debe considerar la matriz de amortiguamiento por el vector velocidad en la ecuación de movimiento.

La ecuación (4.13) se puede generalizar para un edificio de corte de N pisos, como el mostrado en la figura 4.8.

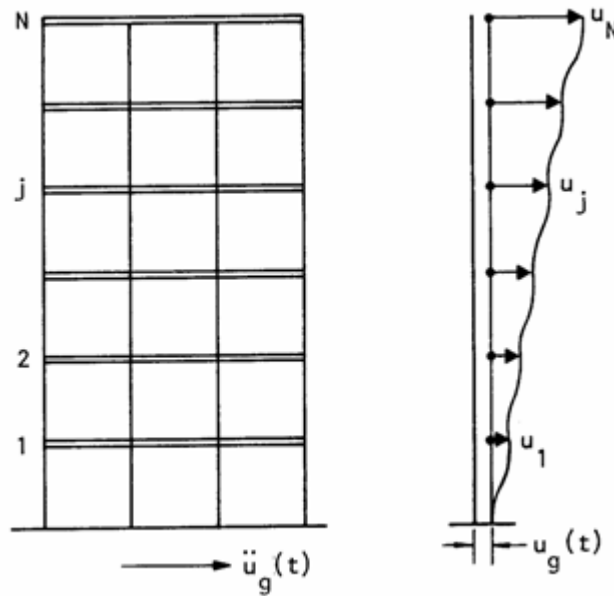


Fig. 4.8. Edificio de N pisos sometido a movimiento sísmico en su base

En este caso si el edificio de N pisos, se encuentra sometido a una excitación en su base, todo el bloque del edificio presenta un movimiento de cuerpo rígido de desplazamiento $\mathbf{u}_g(\mathbf{t})$, más una configuración deformada representada por $\mathbf{u}_j(\mathbf{t})$ con valores de $j=1,\dots,N$; relativos.

Por lo tanto, la ecuación general del movimiento para el edificio de N pisos es:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{\mathbf{u}}_g(\mathbf{t}) \quad (4.14)$$

Donde la fuerza externa se representa con la siguiente expresión:

$$\mathbf{P}_{\text{efect}}(\mathbf{t}) = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{\mathbf{u}}_g(\mathbf{t}) \quad (4.15)$$

La figura 4.9 muestra la equivalencia entre aplicar una sollicitación sísmica en la base del edificio y un sistema de fuerzas efectivas $-\mathbf{m}_j\ddot{\mathbf{u}}_g(\mathbf{t})$, para un edificio de corte de N pisos.

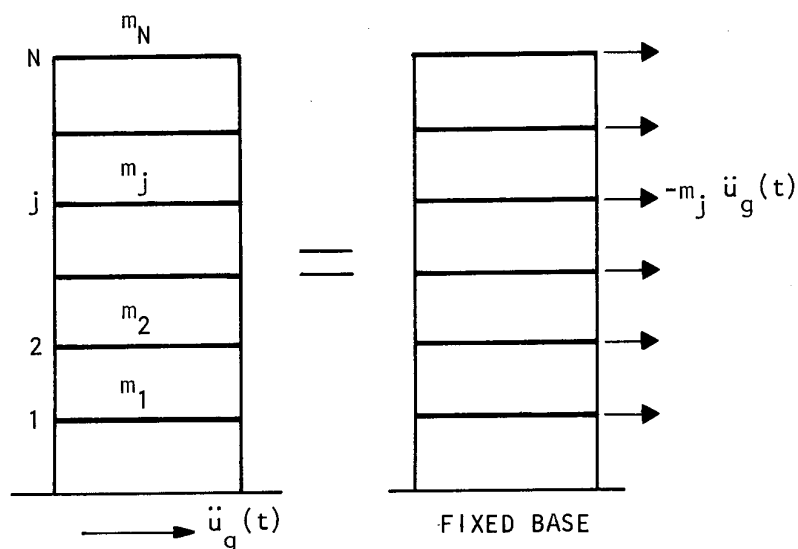


Fig. 4.9. Sistema de sollicitaciones equivalentes

En conclusión, el desplazamiento total de cada nivel se expresa como la suma del desplazamiento total de la base del edificio, más el desplazamiento producido por la fuerza efectiva aplicada en cada nivel.

4.3 Vibraciones libres

Sistemas no amortiguados

Cuando una estructura se encuentra sometida a un movimiento producido por fuerzas externas o de excitación en su base, su posición de equilibrio se interrumpe por la aparición de fuerzas de inercia que afectan a las masas de entrepiso. Entonces, la respuesta de una estructura en vibración libre se describe por el vector desplazamiento $\mathbf{u}(t)$, que varía en el tiempo.

La figura 4.10 muestra las respuestas de desplazamiento de una estructura de tres niveles, en los cuales tanto los valores de $\mathbf{u}_j(t)$ y $\dot{\mathbf{u}}_j(t)$, se inician para un tiempo $t=0$, y para este caso particular, se tiene que $\dot{\mathbf{u}}_j = \mathbf{0}$.

Los sistemas estructurales de varios grados de libertad no presentan un único movimiento armónico simple con una sola frecuencia de vibración. Por el contrario, su movimiento depende de las diversas formas que la estructura responde a una excitación. Además, no sólo los desplazamientos varían con el tiempo, sino también la configuración deformada de la estructura.

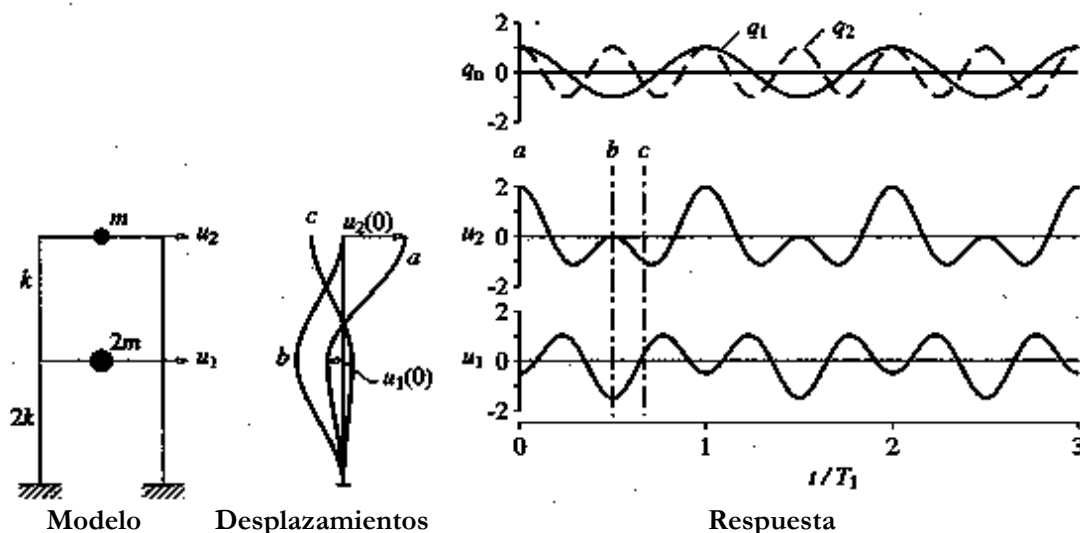
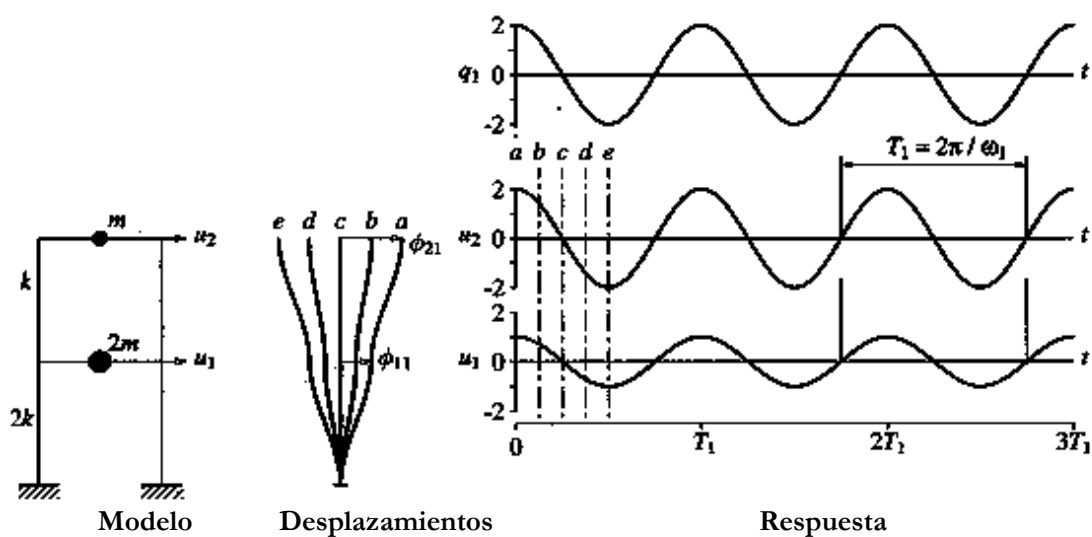


Fig. 4.10. Edificio en vibración libre con desplazamientos iniciales

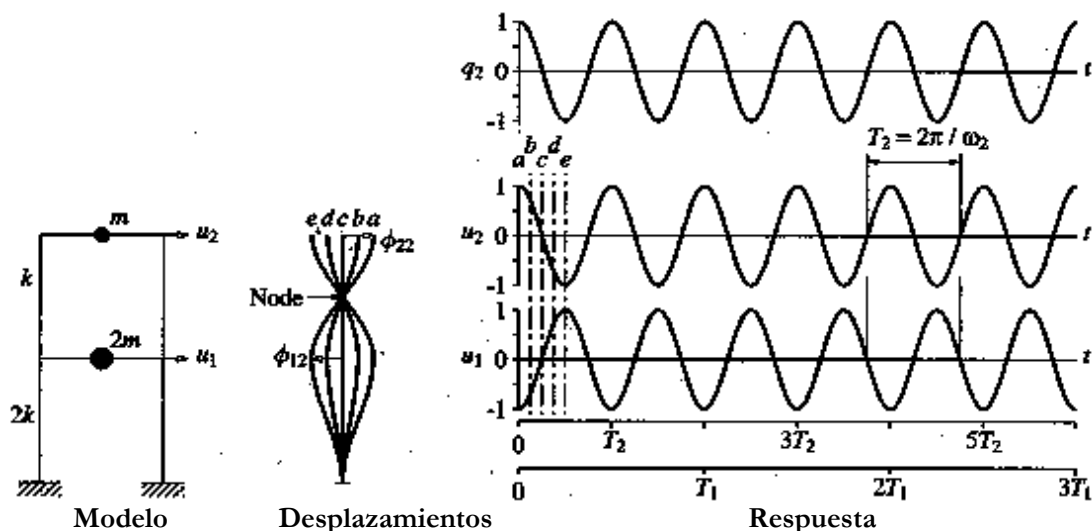
Cada una de las formas de vibración son conocidas como modos naturales de vibración (ϕ_n). Cada modo presenta un periodo natural de vibración T característico. Este periodo representa el tiempo requerido para que la estructura complete un ciclo en movimiento armónico simple. El término natural se emplea para enfatizar las propiedades naturales de la estructura, dependientes de su masa y rigidez.

El vector ϕ_n define sólo la deformada de la estructura vibrando con su correspondiente periodo natural. Sin embargo, se debe tener en cuenta que el vector ϕ_n no define los valores de desplazamientos de entrepiso. Para conocer estos desplazamientos se deben conocer las amplitudes de los movimientos.

Las figura 4.11(a) y (b) muestran los dos modos naturales de vibración para el ejemplo del edificio de dos pisos, sin considerar el efecto del amortiguamiento.



(a) PRIMER MODO



(b) SEGUNDO MODO

Fig. 4.11. Modos naturales de vibración de un edificio de dos pisos sin considerar el efecto del amortiguamiento

Los valores de los modos generalmente se normalizan considerando como valor unitario el desplazamiento correspondiente al último nivel. También se pueden normalizar considerando el valor total de la masa como unitario. Sin embargo, cualquier parámetro de normalización no afecta al resultado final del análisis de la respuesta dinámica.

Sistemas amortiguados

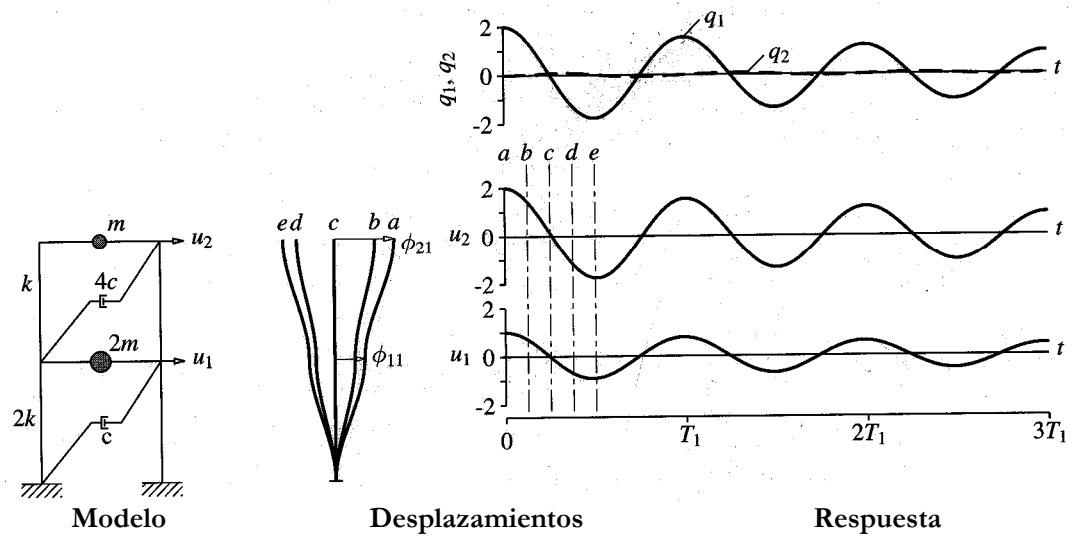
Los sistemas estructurales amortiguados de varios grados de libertad se idealizan considerando un amortiguamiento viscoso. Estos sistemas se perturban desde su posición de equilibrio y presentan un decaimiento de su amplitud, hasta lograr el equilibrio estático.

El periodo T_{nD} , la frecuencia circular ω_{nD} y la frecuencia cíclica f_{nD} , de cualquiera de los n modos de vibración, se relacionan al igual que los casos de sistemas sin amortiguamiento. Por otro lado, la influencia del amortiguamiento en la frecuencia y el periodo natural de la estructura es similar al de los sistemas de un grado de libertad, según se muestran en las ecuaciones:

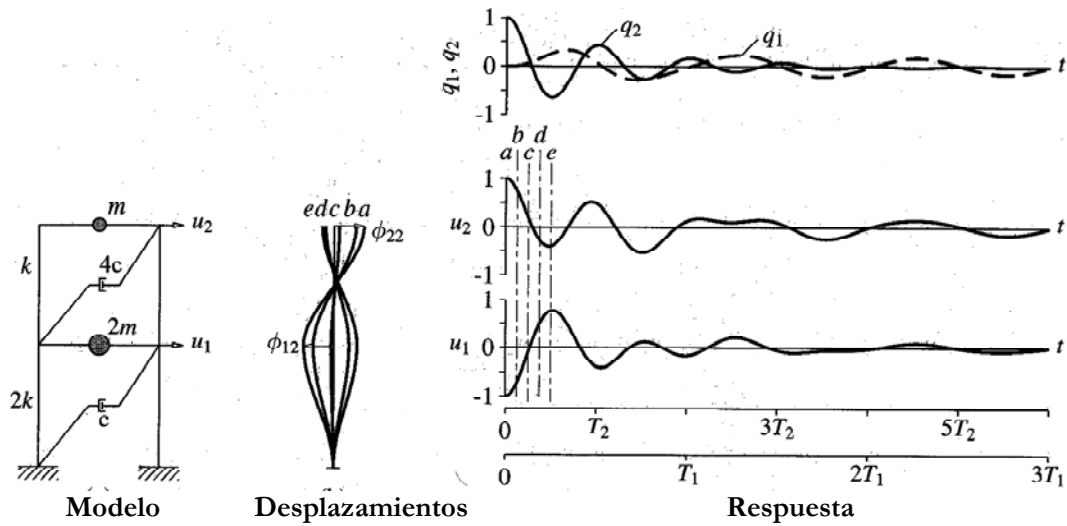
$$\omega_{nD} = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2} \qquad T_{nD} = T_n / \sqrt{1 - \xi_n^2}$$

Donde ξ_n representa la razón de amortiguamiento para una estructura de varios pisos de un determinado modo de vibración.

La figura 4.12 ilustra los dos modos naturales de vibración del edificio de dos pisos considerando el efecto del amortiguamiento. Se observa de la figura 4.12, las distintas configuraciones deformadas de cada uno de los modos y sus distintos valores de respuesta.



(a) Primer modo



(b) Segundo modo

Fig. 4.12. Modos naturales de vibración de un edificio de dos pisos con amortiguamiento

CAPÍTULO 5

MODOS Y FRECUENCIAS NATURALES

5.1 Cálculo de los modos y frecuencias naturales de vibración

En el análisis del comportamiento elástico de las estructuras, las frecuencias y los modos naturales cumplen un rol importante en la evaluación de la respuesta dinámica, ya que se encuentran relacionados con la forma que el sistema responde ante una sollicitación.

Recordando que la ecuación del movimiento en vibración libre está dada por:

$$\underline{\mathbf{m}}\ddot{\underline{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{k}}\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (5.1)$$

La representación matemática de los modos $\underline{\phi}$ de un sistema no amortiguado en vibración es:

$$\underline{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{q}_n(t) \underline{\phi}_n \quad (5.2)$$

Derivando dos veces (5.2):

$$\ddot{\underline{\mathbf{u}}}(t) = -\omega_n^2 \mathbf{q}_n(t) \underline{\phi}_n \quad (5.3)$$

Donde:

$$\ddot{\mathbf{q}}_n(t) = -\omega_n^2 \mathbf{q}_n(t) \quad (5.4)$$

Reemplazando (5.2), (5.3) en (5.1) obtenemos sistemas de ecuaciones lineales homogéneas:

$$[-\omega_n^2 \underline{\mathbf{m}} \underline{\phi}_n + \underline{\mathbf{k}} \underline{\phi}_n] \mathbf{q}_n(t) = \underline{\mathbf{0}} \quad (5.5)$$

Donde $\mathbf{q}_n(t)$ representa la variación de los desplazamientos en el tiempo, y se determina con la expresión:

$$\mathbf{q}_n(t) = \mathbf{A}_n \cos \omega_n t + \mathbf{B}_n \sen \omega_n t \quad (5.6)$$

Los valores \mathbf{A}_n y \mathbf{B}_n de la ecuación (5.5) se calculan en función de las condiciones iniciales del sistema.

La ecuación (5.5) presenta dos soluciones. La primera se determina cuando $\mathbf{q}_n(t)=0$, por lo tanto, $\underline{\mathbf{u}}(t)=\underline{\mathbf{0}}$, entonces no existe movimiento del sistema. Ésta es la denominada “solución trivial”. La segunda solución se obtiene igualando a cero la expresión $[-\omega_n^2 \underline{\mathbf{m}} \underline{\phi}_n + \underline{\mathbf{k}} \underline{\phi}_n]$ de la ecuación (5.5):

$$\underline{\mathbf{k}} \underline{\phi}_n = \omega_n^2 \underline{\mathbf{m}} \underline{\phi}_n \quad (5.7)$$

La solución de esta ecuación, se conoce como problema de valor propio, para el cual existen diversos métodos y algoritmos de solución. La ecuación (5.7) se puede expresar como:

$$[\underline{\mathbf{k}} - \omega_n^2 \underline{\mathbf{m}}] \underline{\phi}_n = \underline{\mathbf{0}} \quad (5.8)$$

La ecuación (5.8) se analiza para un conjunto de N ecuaciones homogéneas, donde la solución trivial $\underline{\phi}_n = \underline{\mathbf{0}}$ se descarta, por lo que la solución es:

$$\det [\underline{\mathbf{k}} - \omega_n^2 \underline{\mathbf{m}}] = 0 \quad (5.9)$$

En la ecuación (5.9) se deben obtener N valores de frecuencias circulares de vibración, siendo conocido el factor ω_n^2 como valor propio. Debido a que las matrices $\underline{\mathbf{m}}$ y $\underline{\mathbf{k}}$, son simétricas y positivas, se puede comprobar que las raíces de la ecuación característica serán siempre reales y positivas.

5.2 Matrices modales y espectrales

Los N valores propios, y sus respectivas frecuencias naturales y modos de vibración, se ensamblan en matrices. Los N vectores propios se pueden evaluar en una sola matriz cuadrada (ecuación 5.10), donde cada columna representa un modo natural de vibración:

$$\Phi = [\phi_{jn}] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

La matriz Φ se le suele llamar matriz modal, y a la matriz de valores propios Ω , matriz espectral:

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^2 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Cada valor y vector propio debe cumplir con la ecuación (5.8), que se expresa como:

$$\underline{\mathbf{k}} \underline{\phi}_n = \underline{\mathbf{m}} \underline{\phi}_n \omega_n^2 \quad (5.12)$$

La ecuación (5.12) es equivalente a:

$$\underline{\mathbf{k}} \Phi = \underline{\mathbf{m}} \Phi \Omega^2 \quad (5.13)$$

5.3 Ortogonalidad de los modos

La propiedad conocida como ortogonalidad de los modos, permite transformar a las matrices simétricas en diagonales, desacoplando de esta forma un conjunto de N ecuaciones en N sistemas independientes.

Si se multiplica a cada miembro de la ecuación (5.12) por el término $\underline{\phi}_r^T$, donde $\omega_n \neq \omega_r$, se tiene:

$$\underline{\phi}_r^T \underline{k} \underline{\phi}_r = \omega_n^2 \underline{\phi}_r^T \underline{m} \underline{\phi}_n \quad (5.14)$$

Similarmente, si se multiplica a cada miembro de la ecuación (5.12) por el término $\underline{\phi}_n^T$, se tiene:

$$\underline{\phi}_n^T \underline{k} \underline{\phi}_r = \omega_n^2 \underline{\phi}_n^T \underline{m} \underline{\phi}_r \quad (5.15)$$

De las ecuaciones (5.14) y (5.15) se obtiene:

$$(\omega_n^2 - \omega_r^2) \underline{\phi}_n^T \underline{m} \underline{\phi}_r = 0 \quad (5.16)$$

La ecuación (5.16) demuestra que para valores $(\omega_n^2 - \omega_r^2) \neq 0$, la ortogonalidad de la matriz \underline{m} se cumple.

Por lo tanto, la ortogonalidad de los modos naturales implica que las siguientes matrices cuadradas deben ser diagonales:

$$\underline{K} \equiv \underline{\Phi}^T \underline{k} \underline{\Phi} \quad \underline{M} \equiv \underline{\Phi}^T \underline{m} \underline{\Phi}$$

Donde los elementos diagonales son:

$$\underline{K}_n = \underline{\phi}_n^T \underline{k} \underline{\phi}_n \quad \underline{M}_n = \underline{\phi}_n^T \underline{m} \underline{\phi}_n$$

Las matrices de masa y rigidez son positivas, por lo tanto, las diagonales de sus elementos también lo son, y se relacionan por medio de la ecuación:

$$\underline{K}_n = \omega_n^2 \underline{M}_n \quad (5.17)$$

CAPITULO 6

RESPUESTA SÍSMICA

6.1 Análisis modal de la respuesta sísmica

La ecuación del movimiento de edificios sometidos a excitación sísmica en su base, en función a las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento, se define con la expresión:

$$\underline{\mathbf{m}}\ddot{\underline{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{c}}\dot{\underline{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{k}}\underline{\mathbf{u}} = -\underline{\mathbf{m}}\underline{\mathbf{1}}\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_g(t) \quad (6.1)$$

Para la idealización de un edificio de N pisos, esta ecuación matricial tiene N ecuaciones diferenciales ordinarias. Estas ecuaciones se descomponen en N ecuaciones desacopladas, las que contienen las matrices modales y espectrales. La solución de este sistema de ecuaciones es igual al de sistemas de un grado de libertad.

La respuesta de cada modo natural de vibración se calcula independientemente con cada una de las ecuaciones desacopladas (ecuación 6.2). Cada una de las respuestas modales presenta un modo natural de vibración $\underline{\phi}_n$, una frecuencia circular ω_n , una frecuencia natural f_n y una razón de amortiguamiento ξ_n .

Con las N ecuaciones desacopladas, se establece la amplitud para cada modo natural de vibración:

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2q_n = -\frac{L_n}{M_n}\ddot{u}_g(t) \quad (6.2)$$

Donde:

$$L_n = \underline{\phi}_n^T \underline{\mathbf{m}} \underline{\mathbf{1}}$$

y

$$M_n = \underline{\phi}_n^T \underline{\mathbf{m}} \underline{\phi}_n$$

La solución de la ecuación diferencial (6.2) del sistema presenta la forma:

$$q_n(t) = -\frac{L_n}{M_n} \frac{1}{\omega_{nD}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi_n\omega_n(t-\tau)} \text{sen}[\omega_{nD}(t-\tau)] d\tau \quad (6.3)$$

La contribución del n-ésimo modo del desplazamiento $\mathbf{u}_j(t)$ al j-ésimo piso, se obtiene con:

$$\mathbf{u}_{jn}(t) = q_n(t)\phi_{jn} \quad (6.4) \quad \text{Para } j=1,2,3,\dots, N$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$u_{jn}(t) = -\frac{L_n}{M_n} \frac{\phi_{jn}}{\omega_{nd}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \text{sen}[\omega_{nd}(t-\tau)] d\tau \quad (6.5)$$

Las fuerzas internas como los cortantes y momentos, asociados a las deformaciones de un edificio de varios pisos, se determinan mediante el método de fuerzas laterales equivalentes. Estas son fuerzas externas que pueden ser aplicadas como cargas estáticas en función a un determinado desplazamiento $u_n(t)$:

$$f_n(t) = k u_n(t)$$

Por lo tanto, cualquier fuerza interna se puede determinar por medio de un análisis estático de la estructura sujeta a un sistema equivalente de fuerzas laterales. Por ejemplo, la fuerza cortante y el momento en la base de una estructura se evalúan con las expresiones:

$$V_{on}(t) = \sum_{j=1}^N f_{jn}(t) \quad (6.6)$$

$$M_{on}(t) = \sum_{j=1}^N h_j f_{jn}(t) \quad (6.7)$$

Donde h_j es la altura del j -ésimo piso a la base. La figura 6.1 ilustra las fuerzas laterales equivalentes para el n -ésimo modo de vibración.

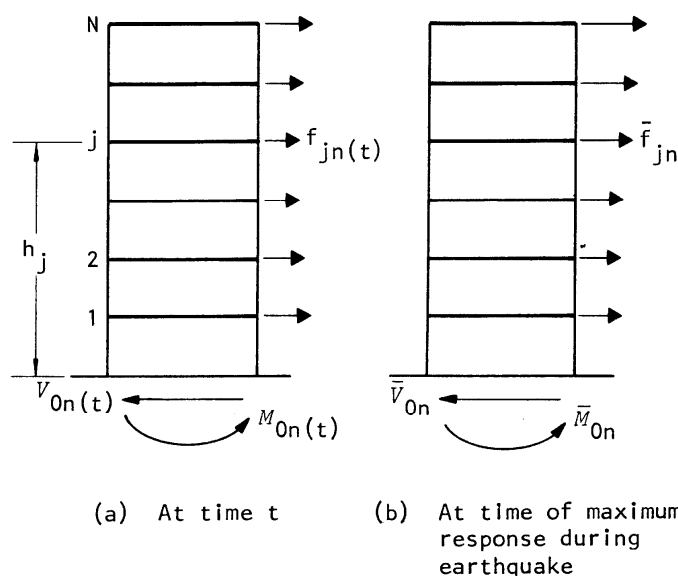


Fig. 6.1. Fuerzas laterales equivalentes para el n -ésimo modo de vibración

La respuesta de la estructura ante un movimiento sísmico, se obtiene por combinación o superposición modal de las respuestas de todos los modos naturales de vibración. La figura 6.2 ilustra este proceso.

Por lo tanto, el desplazamiento y la fuerza cortante del j -ésimo piso, así como la fuerza cortante y el momento basal, se determinan con las ecuaciones:

$$\mathbf{u}_j(\mathbf{t}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_{jn}(\mathbf{t}) \quad (6.8.a)$$

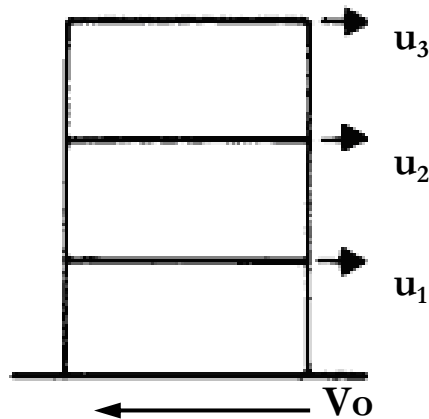
$$\mathbf{f}_j(\mathbf{t}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{f}_{jn}(\mathbf{t}) \quad (6.8.b)$$

$$\mathbf{V}_0(\mathbf{t}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{V}_{0n}(\mathbf{t}) \quad (6.8.c)$$

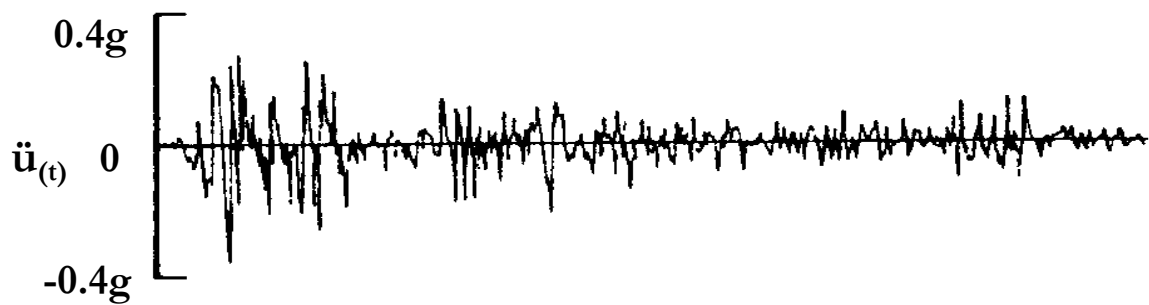
$$\mathbf{M}_0(\mathbf{t}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{M}_{0n}(\mathbf{t}) \quad (6.8.d)$$

En general cualquier valor de la respuesta $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ es una combinación de la contribución de todos los modos naturales de vibración (ver figura 6.2), y se expresa como:

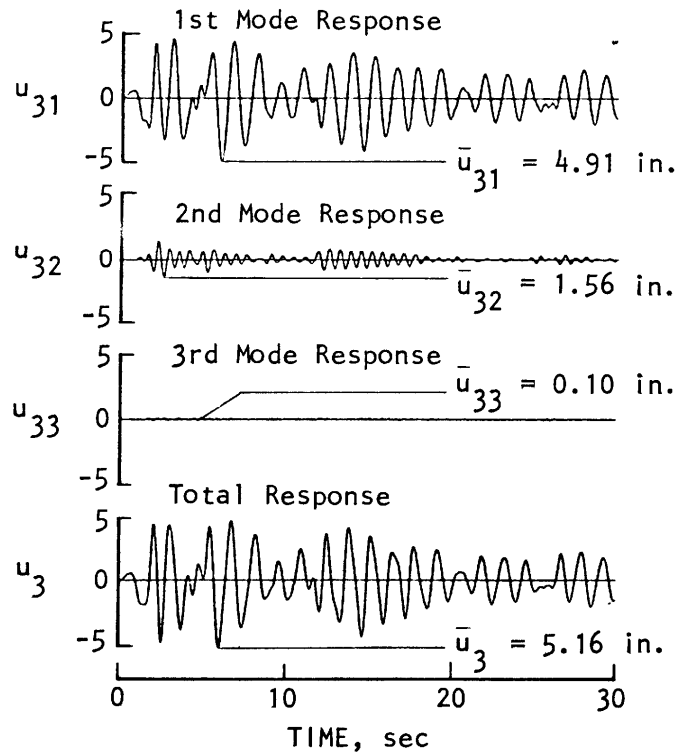
$$\mathbf{r}(\mathbf{t}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{r}_n(\mathbf{t}) \quad (6.9)$$



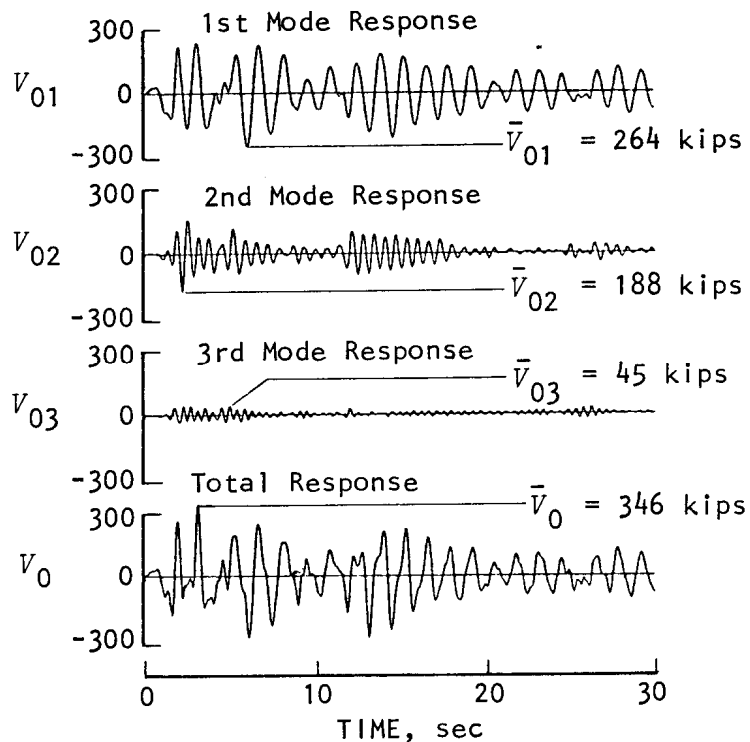
(a) Idealización de un edificio de tres pisos.



(b) Registro sísmico terremoto El Centro, componente S00E, 18 mayo 1940.



(c) Desplazamiento del último nivel para cada modo y respuesta total.



(d) Fuerza cortante en la base por cada modo y respuesta total.

Fig. 6.2. Respuesta sísmica de un edificio de tres pisos

En conclusión, se tienen los siguientes pasos para analizar la respuesta de un edificio de varios pisos:

- 1.- Escribir la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$ en forma numérica con las ordenadas correspondientes del acelerograma. Esto permite establecer un vector columna
- 2.- Definir las propiedades de la estructura:
 - a.- Calcular las matrices de masa y rigidez
 - b.- Estimar las razones de amortiguamiento.
- 3.- Resolver el problema de valores propios y determinar las frecuencias naturales de vibración y los modos naturales de vibración.
- 4.- Calcular la respuesta para cada uno de los modos de vibración de la siguiente manera:
 - a.- Calcular la respuesta modal q_n
 - b.- Calcular los desplazamientos de entrepiso $u_{jn}(t)$
 - c.- Calcular los desplazamientos relativos de entrepiso.
 - d.- Calcular las fuerzas estáticas equivalentes.
 - e.- Calcular las fuerzas internas.
- 5.- Realizar la combinación modal para cada uno de los valores de respuesta, es decir, desplazamientos, cortantes y momentos.

6.2 Análisis espectral

Los valores máximos de la respuesta estructural de un edificio frente a un movimiento sísmico, generalmente son usados para calcular las fuerzas internas máximas de la estructura.

Por ejemplo, la figura 6.3 muestra un modelo de un edificio de corte de 5 pisos, para el cual se han calculado los periodos de cada uno de sus modos naturales de vibración. La máxima respuesta en el n -ésimo modo natural de vibración se expresa en términos de S_{dn} , S_{vn} y S_{an} , que representan las ordenadas de la respuesta espectral de desplazamiento, pseudo-velocidad y pseudo-aceleración, respectivamente.

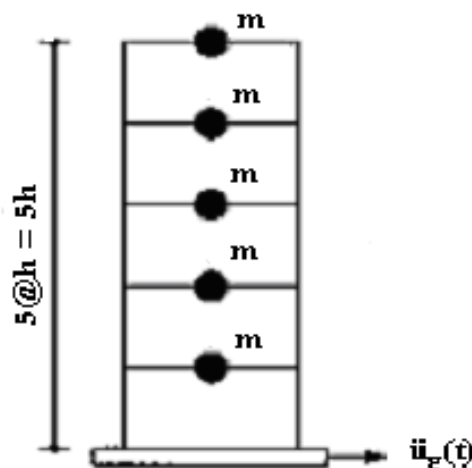


Fig. 6.3. Ejemplo de edificio de 5 pisos

Para cada uno de estos parámetros espectrales y para cada modo de análisis, corresponde un periodo natural T_n y una razón de amortiguamiento ξ_n . Estos parámetros espectrales se pueden obtener directamente del espectro de respuesta sísmica mostrado en la figura 6.4.

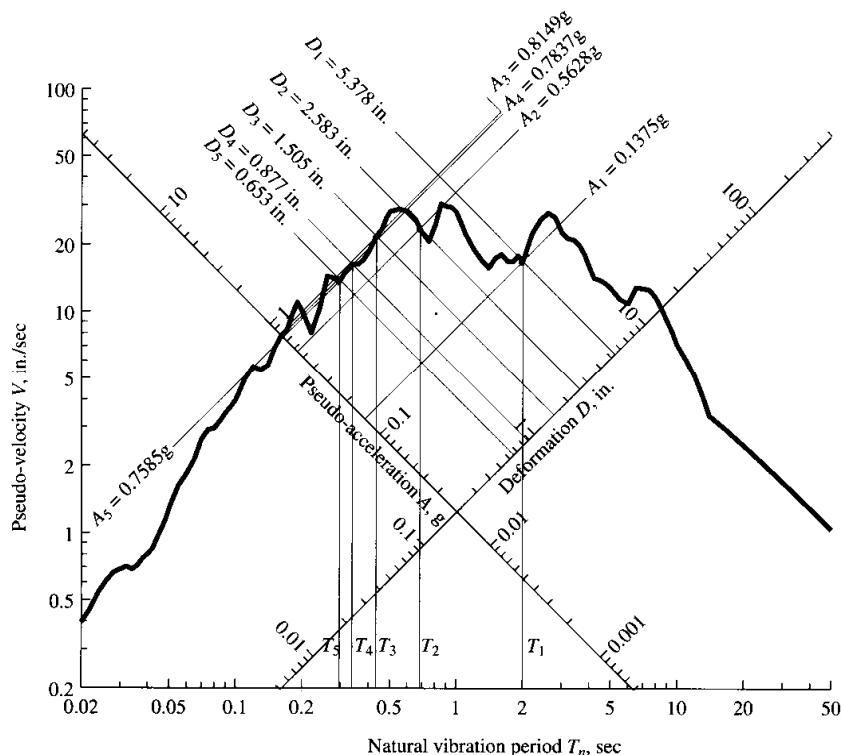


Fig. 6.4. Espectro de repuesta sísmica

El máximo desplazamiento modal se expresa como:

$$q_n = \frac{L_n}{M_n} S_{dn} \quad (6.10)$$

El máximo desplazamiento del j-ésimo piso como:

$$u_{jn} = \frac{L_n}{M_n} S_{dn} \phi_{jn} \quad (6.11)$$

y la máxima deformación en el j-ésimo nivel como:

$$\Delta_{jn} = \frac{L_n}{M_n} S_{dn} (\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}) \quad (6.12)$$

donde el máximo valor de la fuerza lateral equivalente se determina como:

$$f_{jn} = \frac{L_n}{M_n} S_{an} m_j \phi_{jn} \quad (6.13)$$

Los valores de cortante y momento basal se pueden calcular con las expresiones:

$$V_{0n} = \frac{L_n^2}{M_n} S_{an} \quad (6.14)$$

$$M_{0n} = \frac{L_n}{M_n} S_{an} \sum_{j=1}^N h_j \cdot m_j \cdot \phi_{jn} \quad (6.15)$$

Cada uno de los valores de S_{dn} , S_{vn} y S_{an} , se relacionan mediante:

$$S_{an} = \omega_n S_{vn} = \omega_n^2 S_{dn} \quad (6.16.a)$$

$$S_{an} = \left(\frac{2\pi}{T_n} \right) S_{vn} = \left(\frac{2\pi}{T_n} \right)^2 S_{dn} \quad (6.16.b)$$

La figura 6.5 muestra los valores máximos de desplazamiento para los 5 primeros modos de vibración de un edificio de 5 pisos, obtenido del espectro de respuesta sísmica.

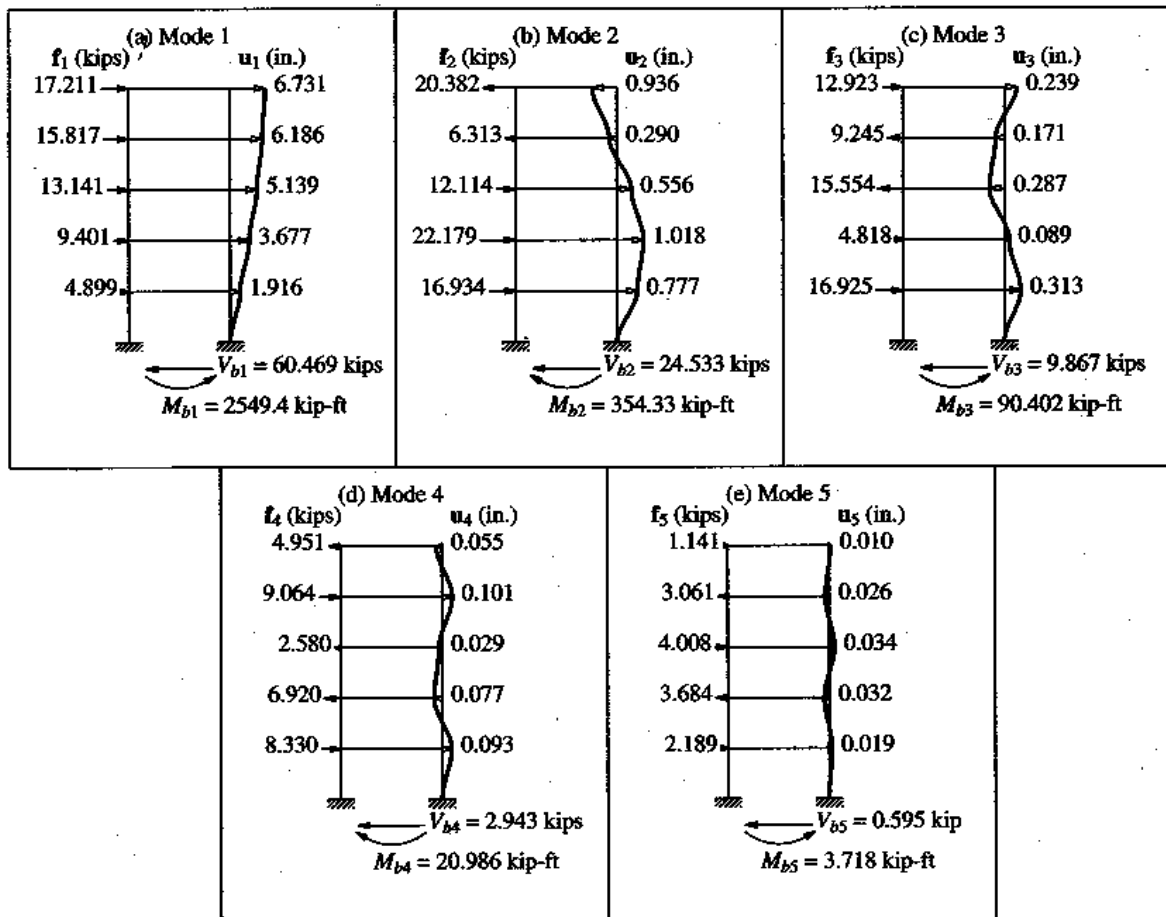


Fig. 6.5. Valores máximos de desplazamiento para los 5 primeros modos de vibración de un edificio de 5 pisos

6.3 Métodos de combinación espectral de la respuesta modal

La respuesta $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ de un edificio se describe como la superposición de las contribuciones $\mathbf{r}_n(\mathbf{t})$ de cada uno de los modos naturales de vibración, para un análisis de la variación de las aceleraciones en el tiempo de una estructura. Sin embargo, para un análisis espectral, la máxima respuesta en cada uno de los modos se determina directamente del espectro de respuesta sísmica.

Debido a que las máximas respuestas para cada modo no ocurren simultáneamente, estas no pueden ser superpuestas de forma directa para obtener el máximo valor de respuesta.

El método más conocido de combinación modal espectral es el de la Raíz Cuadrada de la Suma de los Cuadrados (SRSS), es decir:

$$\bar{\mathbf{r}} = \sqrt{\sum \bar{\mathbf{r}}_n^2} \quad (6.17)$$

Donde $\bar{\mathbf{r}}$ representa la máxima respuesta de desplazamiento, deformación, cortante, o momento en un determinado nivel del edificio.

Este método se aplica sólo a los resultados máximos modales, es decir, a los valores máximos de desplazamientos horizontales (ecuación 6.18.a), derivas de entrepiso (ecuación 6.18.b), cortantes de entrepiso (ecuación 6.18.c), momentos volcantes de entrepiso (ecuación 6.18.d), momento volcante en la base (ecuación 6.18.e) y fuerzas horizontales estáticas correspondientes a las fuerzas máximas modales. A continuación se presentan cada una de las ecuaciones mencionadas:

$$\mathbf{u}_{j\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\mathbf{u}_{j\text{mod}}^i)^2} \quad (6.18.a)$$

$$\Delta_{j\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\Delta_{j\text{mod}}^i)^2} \quad (6.18.b)$$

$$\mathbf{V}_{\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\mathbf{V}_{\text{mod}}^i)^2} \quad (6.18.c)$$

$$\mathbf{M}_{j\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\mathbf{M}_{j\text{mod}}^i)^2} \quad (6.18.d)$$

$$\mathbf{M}_{\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\mathbf{M}_{\text{mod}}^i)^2} \quad (6.18.e)$$

Otro método también utilizado es el llamado Método de la Combinación Cuadrática Completa (CQC), que representa la forma de combinar la respuesta de los diferentes parámetros modales como:

$$\bar{r} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (r_i \cdot r_j \cdot \rho_{ij})} \quad (6.19)$$

Donde r_i y r_j representan las respuestas modales máximas del parámetro de estudio para los modos i , j respectivamente, mientras que ρ_{ij} corresponde al parámetro de relación entre ambos modos.

La ecuación (6.19) se puede expresar entonces como:

$$\bar{r} = \sqrt{\sum_{i=1}^N r_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (r_i \cdot r_j \cdot \rho_{ij})} \quad (6.20)$$

La ecuación (6.20) es similar al método SRSS en su primera expresión, ya que el método SRSS parte de la premisa que las respuestas de los grados de libertad desacoplados son estadísticamente independientes. En comparación a esta premisa, el método CQC (ecuación 6.20) asume que existe una interacción modal.

Finalmente, un caso particular resulta cuando los coeficientes de correlación entre modos es cero (ecuación 6.17), en este caso el método CQC es igual al método SRSS.

La figura 6.6 muestra los coeficientes de correlación para el método CQC.

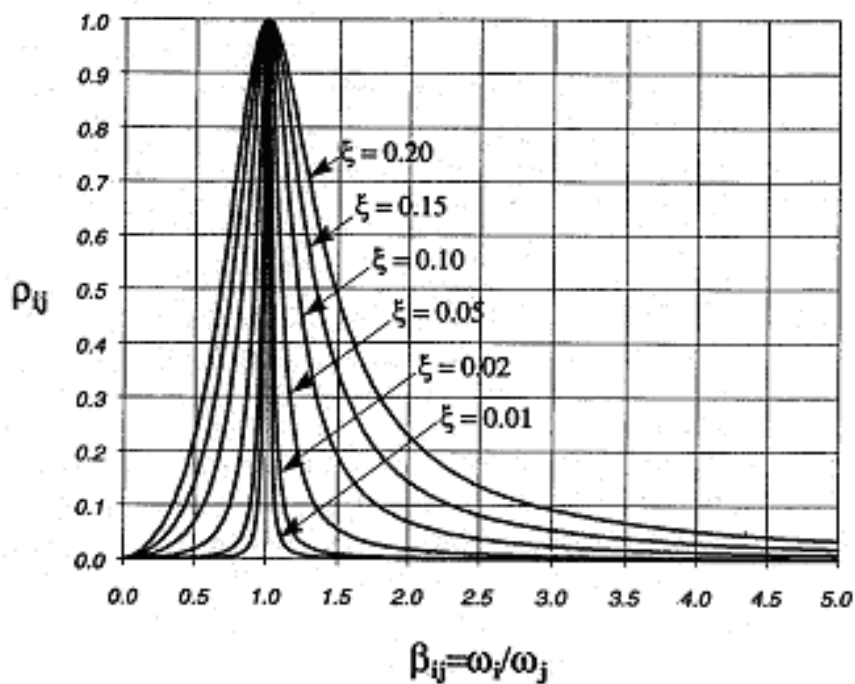


Fig. 6.6. Coeficiente de correlación para el método CQC. (Ref. 4)

ANEXOS

PROGRAMA DESARROLLADO EN MATLAB

Como parte del desarrollo del tema de Análisis Sísmico de Edificios, se ha escrito un programa en el software Matlab 6.1.0.450; Release 12.1 para calcular la respuesta sísmica de sistemas de varios grados de libertad.

El programa desarrollado realiza la evaluación numérica de la respuesta dinámica en el dominio del tiempo bajo el algoritmo de Nigam Jennings (1,2). También muestra gráficamente las diversas respuestas con sus máximos valores.

Ya que el objetivo de este curso es el aspecto teórico y práctico del análisis de edificios, solo se presenta los resultados del programa, mas no así el código y la explicación de cada uno de sus módulos.

A continuación se muestra los resultados de un edificio de corte de tres pisos sometido a la señal sísmica El Centro, 18 mayo de 1940:

"PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU"
 MAESTRIA EN INGENIERIA CIVIL
 DINAMICA DE ESTRUCTURAS
 ANALISIS DE LA RESPUESTA DE SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD
 Ing. Nicola Tarque Ruiz

```

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&
DATOS DE ENTRADA
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&
    
```

```

Numero de pisos =      3
    
```

```

Piso      Masa      Rigidez  Amortiguamiento
      (tn)      (kN/m)      (porcentaje)
1      150.000   200000.000   5.000
2      150.000   200000.000   0.000
3      150.000   200000.000   0.000
    
```

```

Piso  Desplaz. inicial  Veloc. inicial
      (m)              (m/seg)
1      0.000            0.000
2      0.000            0.000
3      0.000            0.000
    
```

```

Matriz de masa (tn)
150.000  0.000  0.000
  0.000 150.000  0.000
  0.000  0.000 150.000
    
```

```

Matriz de rigidez (kN/m)
400000.000 -200000.000  0.000
-200000.000 400000.000 -200000.000
  0.000 -200000.000 200000.000
    
```

```

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&
CALCULOS INICIALES
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&
    
```

Frecuencias y periodos

w(rad/seg)	T(seg)
16.251	0.387
45.533	0.138
65.797	0.095

Modos normalizados al ultimo piso

0.445	-1.247	1.802
0.802	-0.555	-2.247
1.000	1.000	1.000

Comprobacion de la ortogonalidad

Respecto a la masa

276.175	-0.000	-0.000
-0.000	429.440	-0.000
0.000	-0.000	1394.385

Respecto a la rigidez

72933.117	-0.000	-0.000
-0.000	890349.328	-0.000
0.000	-0.000	6036717.555

Modos normalizados a la masa

0.027	-0.060	0.048
0.048	-0.027	-0.060
0.060	0.048	0.027

Comprobacion de la ortonormalidad

1.0	0.0	0.0
0.0	1.0	-0.0
-0.0	-0.0	1.0

&&&&&&&&&&
 RESULTADOS
 &&&&&&&&&&

Maximo cortante en la base del edificio(kN)

-3043.3

Maximo momento de volteo en la base del edificio (kN-m)

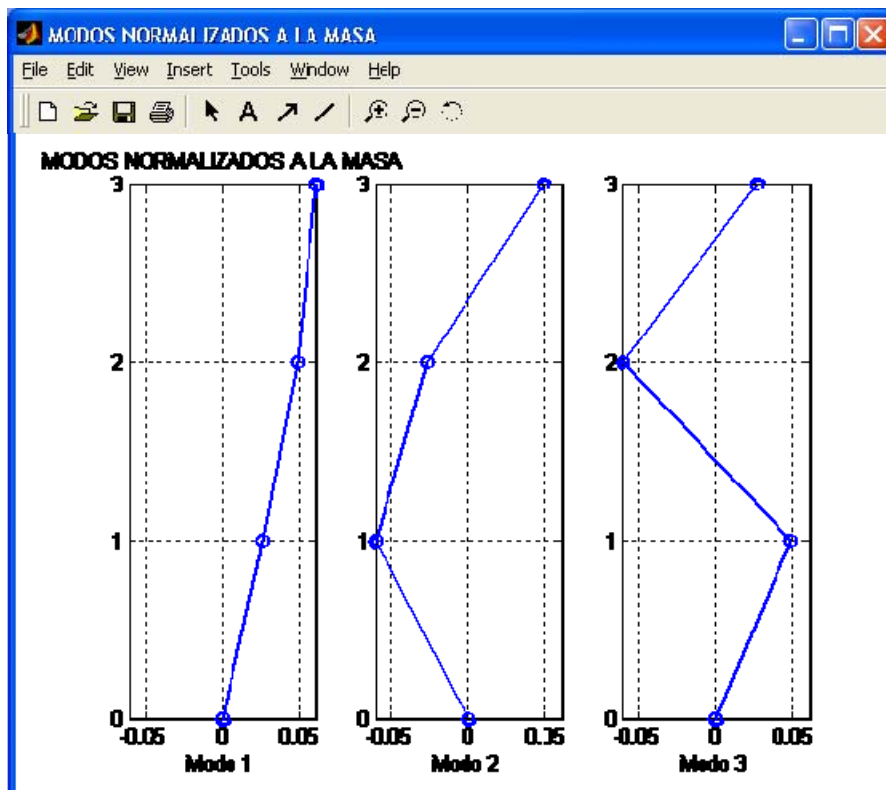
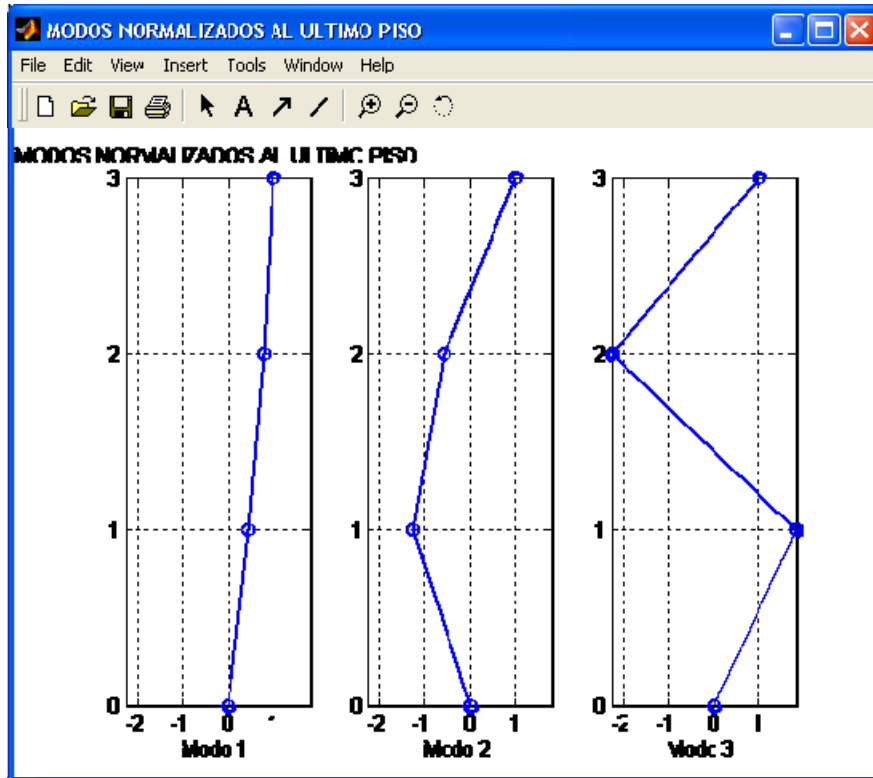
-16783.556

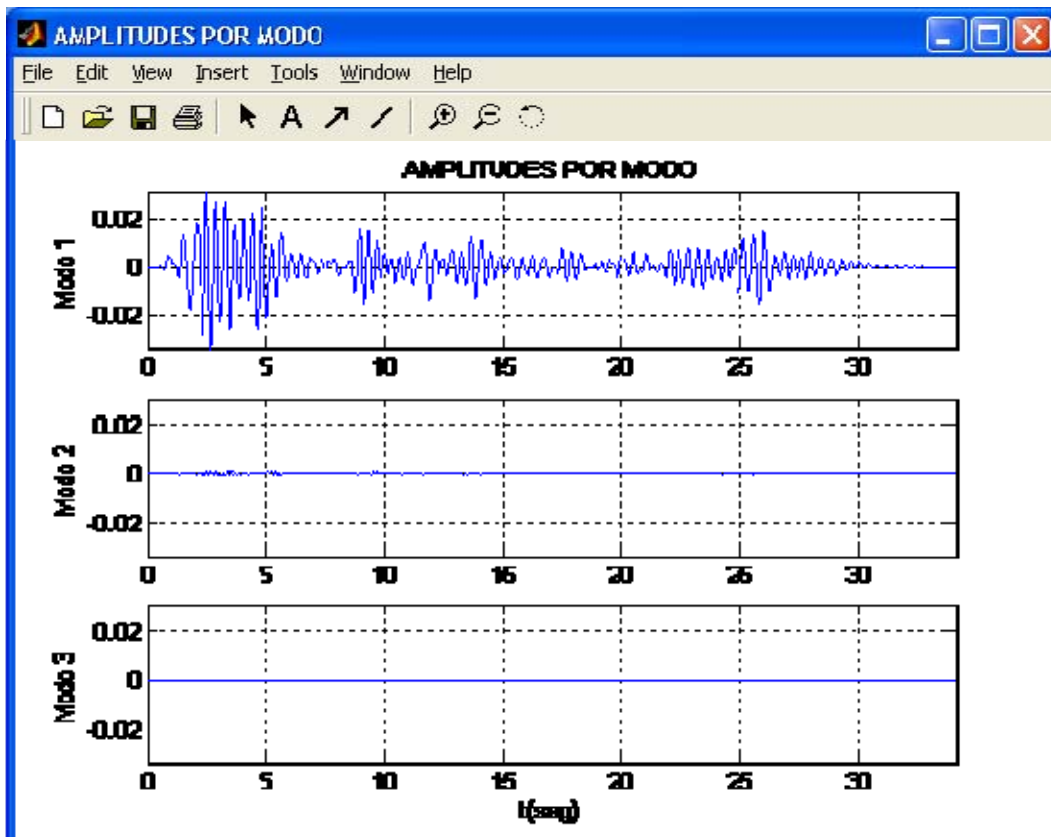
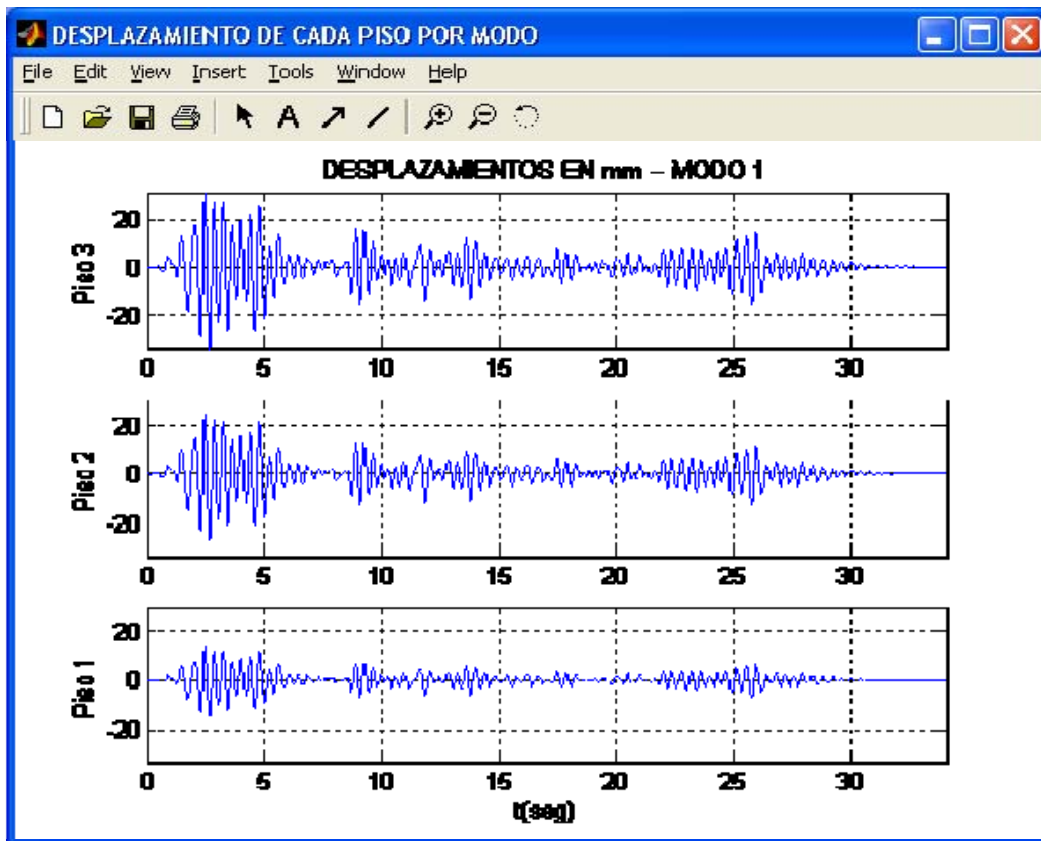
Aceleraciones (m/s²)

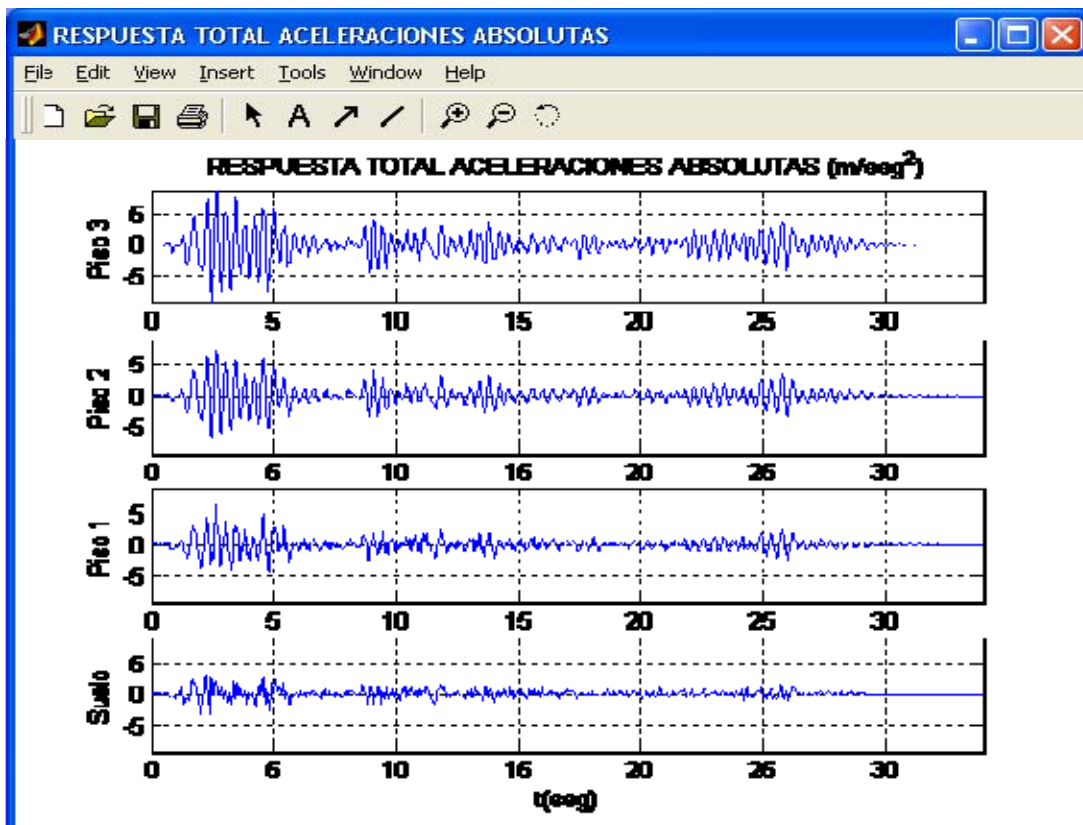
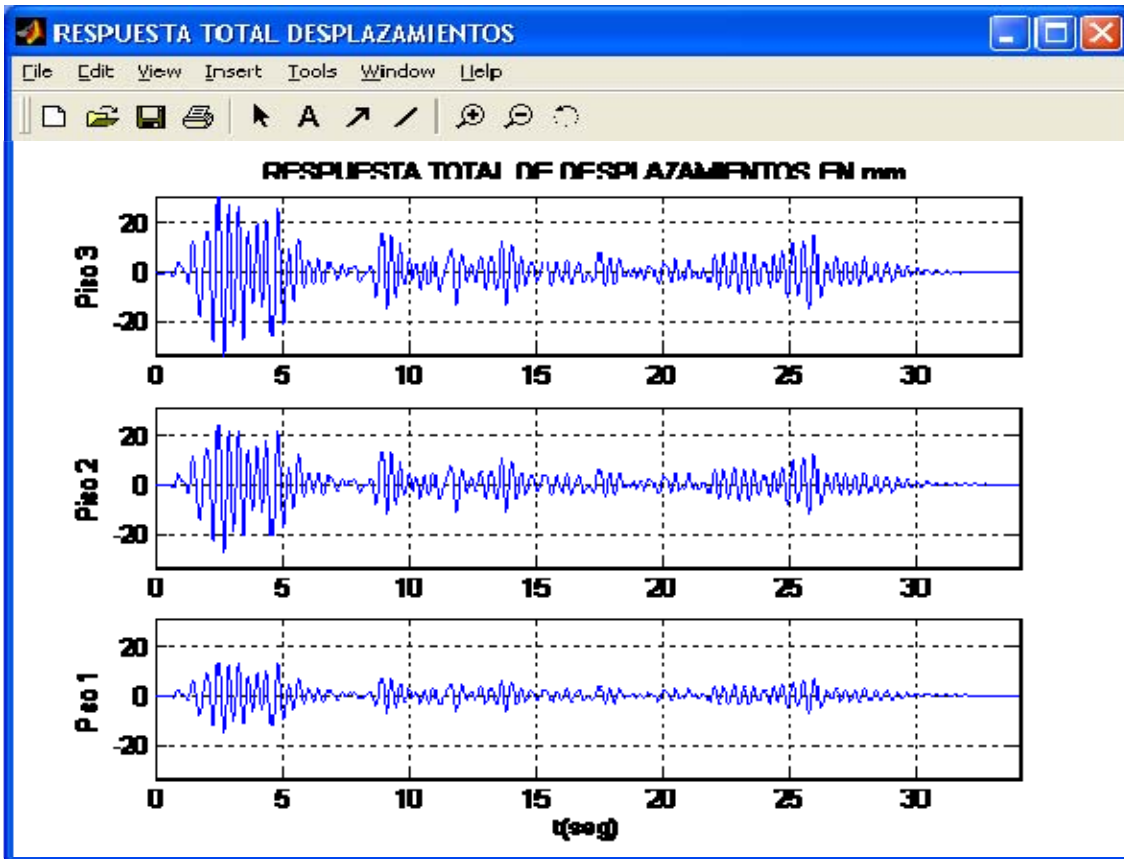
Tipo	Pisos		
	1	2	3
maximo negativo	-4.484	-6.845	-9.170
maximo positivo	6.127	7.166	8.955

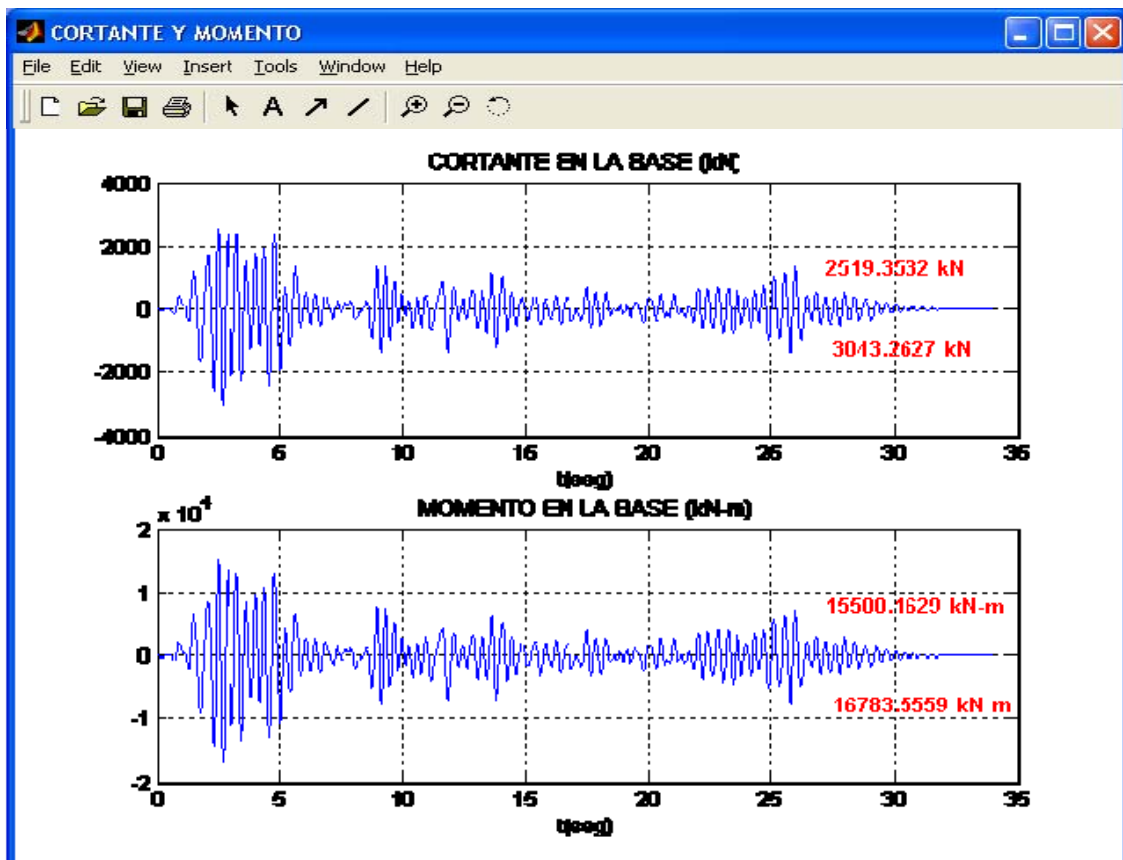
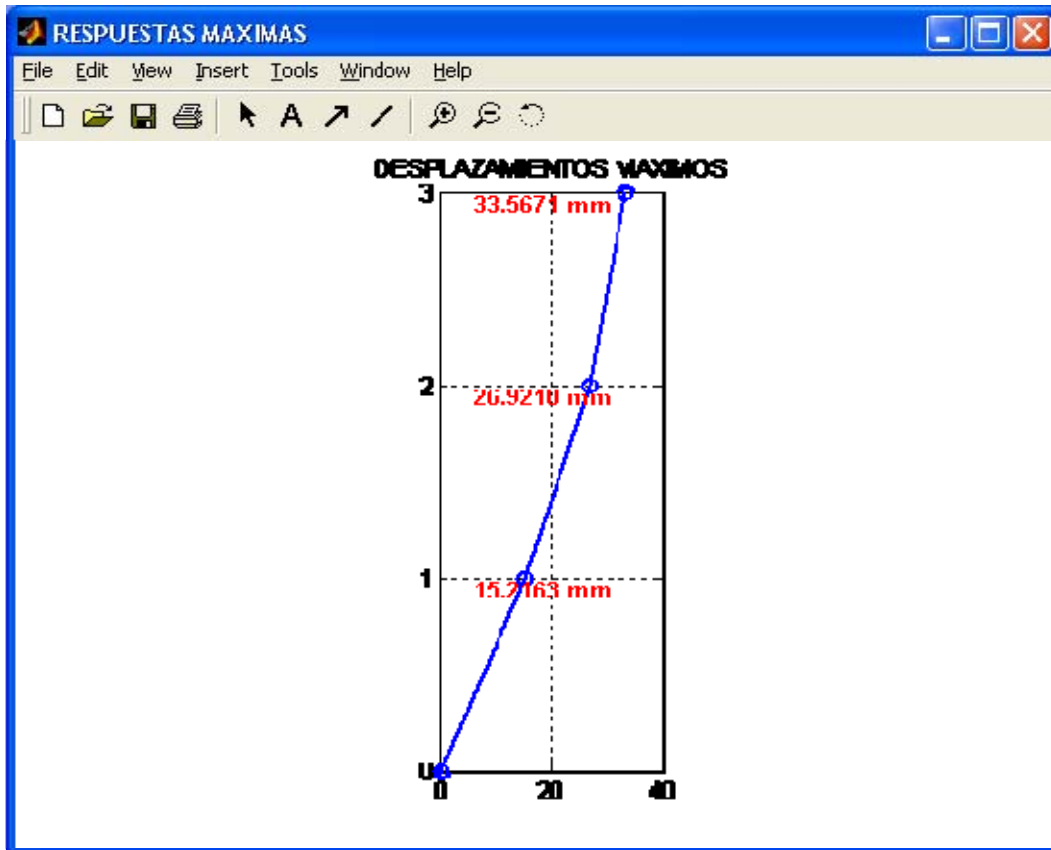
Desplazamientos (mm)

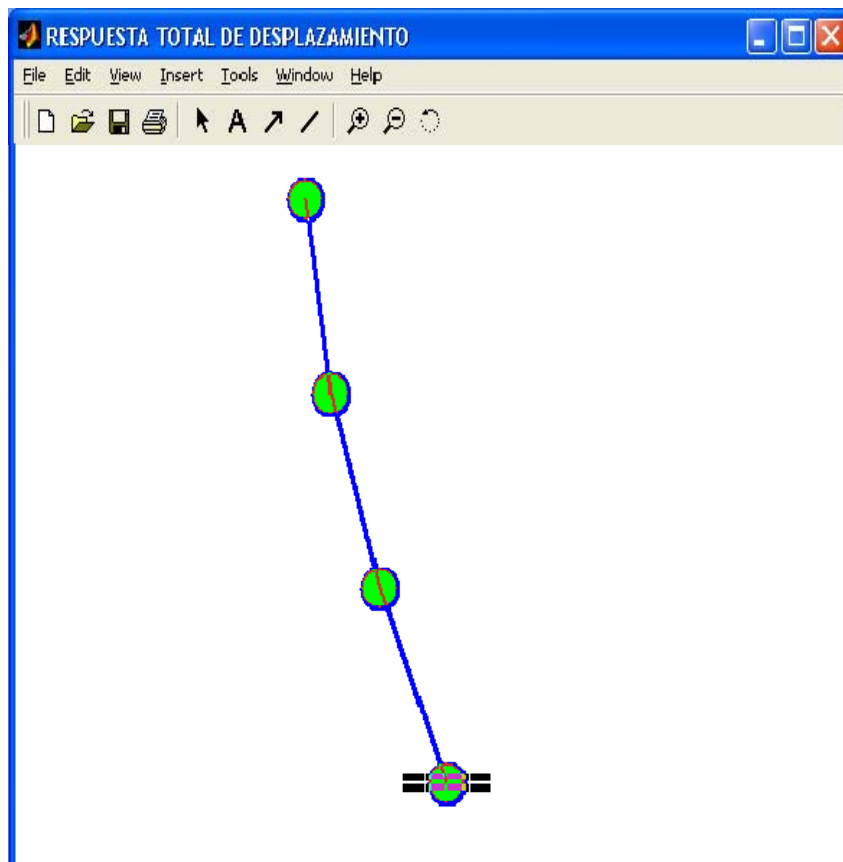
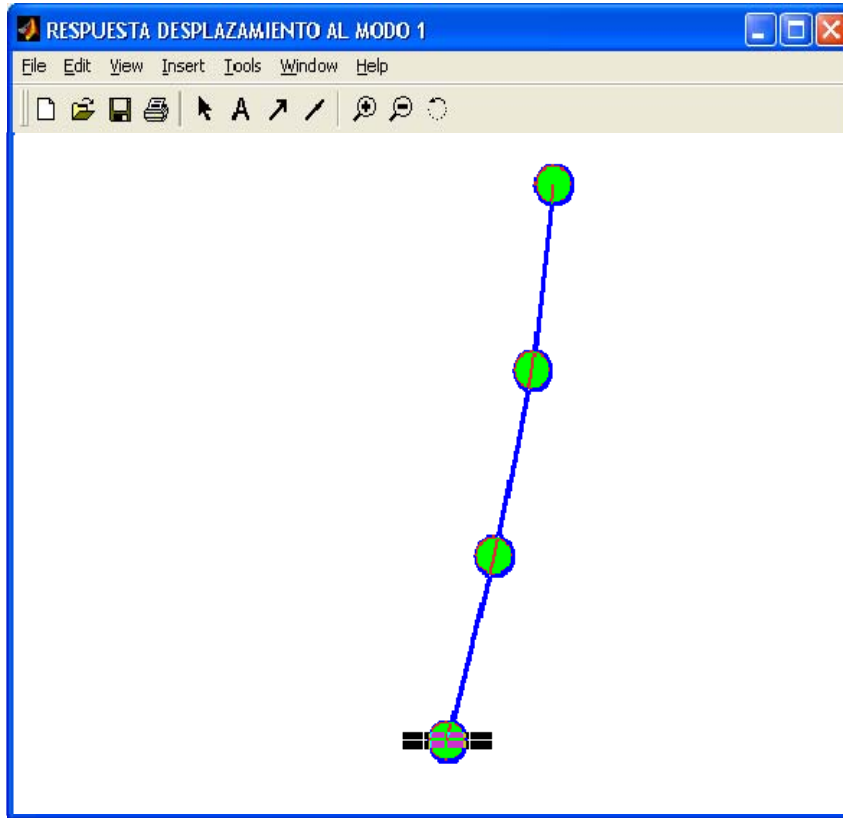
Tipo	Pisos		
	1	2	3
maximo negativo	-15.216	-26.922	-33.567
maximo positivo	12.597	24.108	31.000











REFERENCIAS

1. - Clough, R., Penzien, J., 1993. "Dynamics of Structures", McGraw-Hill, New York.
2. - Chopra, A. K., 1995. "Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering", Prentice-Hall, Berkeley, California.
- 3.- Chopra, A. K., 1980. "Dynamics of Structures, a Primer", Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, California.
- 4.- García R., L., 1998. "Dinámica Estructural aplicada al Diseño Sísmico", Universidad de Los Andes, Bogotá, Colombia.
5. - Inman, D., 1996. "Engineering Vibration", Prentice-Hall, New Jersey.
- 6.- Maestría en Ingeniería Civil, 2002. "Apuntes de clase del curso Dinámica de Estructuras", Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.
- 7.- Matlab, 2001, "The Language of Technical Computing", Version 6.1.0.450; Release 12.1